

Lista 3-1. Nierówności i szacowania.

41. Która z liczb jest większa

a) $2^{1000!}$ czy $999^{999!}$?

b) 26^{99} czy 10^{151} ?

c) 26^{99} czy 123^{65} ?

42. Niech $a = \sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{256} \quad \text{czy} \quad 256^a ?$$

43. Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a = (5 - \sqrt{37})^{2008} \quad b = (6 - \sqrt{37})^{2009} \quad c = (7 - \sqrt{73})^{2011} \quad d = (9 - \sqrt{73})^{2013}$$

44. Która z liczb jest większa $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

Uwaga: Zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn.

$$a^{b^c} = a^{(b^c)} .$$

45. Która z liczb jest większa $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{9}{4}}$ czy 6 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 100 oraz wolno wykorzystać równości $2^{11} = 2048$ i $3^7 = 2187$.

46. Która z liczb jest większa 45^{13} czy 2^{72} ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 300.

47. Dla ustalonej liczby naturalnej M wskaż taką liczbę naturalną $n > 1$, że

$$n^M \leq 2^n .$$

Wskazówka: Dla $M \neq 3$ możesz skorzystać z nierówności $M^2 \leq 2^M$ (podnosząc tę nierówność do odpowiedniej potęgi).

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą k udowodnić nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

48. $L = 3972^{257}$ 49. $L = 700!$

50. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz b znajdź ograniczenie górne wyrażenia

$$\frac{ab}{a^2 + 4b^2} .$$