

Lista 4-2. Ciągi i granice.

71. Podaj kolejny wyraz ciągu i wzór na wyraz ogólny tego ciągu

a) $2, -2, 2, -2, 2, ?$ b) $4, 7, 10, 13, 16, ?$ c) $1, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \frac{81}{16}, ?$ d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, ?$

72. Korzystając z metody różnicowej podaj kolejny wyraz ciągu

a) $0, 6, 24, 60, 120, 210, ?$ b) $1, 2, 5, 12, 27, 58, ?$

73. Korzystając z definicji udowodnij, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+2}$ dąży do 1.

74. Udowodnij, że $a_n \rightarrow 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $|a_n| \rightarrow 0$.

75. Wiedząc, że $a_n + b_n \rightarrow 3$ oraz $2a_n - b_n \rightarrow 3$ udowodnij, że ciągi a_n i b_n są zbieżne i znajdź ich granicę.

76. Zbadaj monotoniczność ciągów

a) $n - \sqrt{n}$, b) $\frac{2n-3}{n+1}$, c) $\sin(n\pi)$, d) $\cos(n\pi)$.

77. Podaj wzór na wyraz ogólny ciągu rekurencyjnego (a_n) zadanego jako

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

Wskazówka: Wypisz początkowe wyrazy tego ciągu. Zgadnij wzór na wyraz ogólny tego ciągu. Sprawdź, że zgadnięty wzór spełnia powyższe równania.

PRAWDA CZY FAŁSZ?

W poniższych zadaniach należy zbadać, czy podane stwierdzenia są prawdziwe.

78.

- a) Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- b) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- c) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- d) Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy nie będącej zerem, a ciąg (b_n) jest rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.

79.

- a) Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, to $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$.
- b) Jeżeli ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.
- c) Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow -2$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

80.

- a) Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.
- b) Jeżeli ciąg (a_n^2) jest rozbieżny, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.