

Lista 6-3. Funkcje. Granica i ciągłość.

121. Znajdź wartości parametrów a, b takie, że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x < 1 \\ x^2 & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ ax - b & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła. Naskicuj wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b) , dla których funkcja f jest ciągła.

122. Wyznacz dziedzinę funkcji

a) $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x)$,

b) $g(x) = \ln((x-1) \cdot x)$.

c) Zastanów się, czy $f(x) = g(x)$.

123. Podaj wzór i znajdź dziedzinę funkcji $f \circ g$ oraz $g \circ f$, dla

a) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \sqrt{x}$,

b) $f(x) = -e^x$, $g(x) = \sqrt{x+1}$.

124. Znajdź wzór funkcji g odwrotnej do funkcji

a) $f(x) = x^5 + 3$,

b) $f(x) = 2e^x + 1$.

125. Naskicuj kąt $\alpha = \arctg(2)$.

126. Wskaż, które z poniższych funkcji są parzyste, a które są nieparzyste:

$$x^2, \quad x^3, \quad x+1, \quad \frac{1}{x}, \quad \sqrt[3]{x^6+1}, \quad \sqrt[3]{x^5+1}, \quad 2^x, \quad \ln|x|, \quad \frac{x^2-x}{x-1}.$$

127. Wskaż, które z poniższych funkcji są ciągłe, a które są nieciągłe:

$$[x^2 - x], \quad [x]^2 - [x], \quad x^2 - x, \quad x^2 - x.$$

128. Znajdź parametr α taki, że granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x^\alpha} - x)$$

jest dodatnia i skończona. Podaj tę granicę.

129. Załóżmy, że dla funkcji f z dziedziną D_f i zbiorem wartości W_f istnieje funkcja odwrotna

$$g : W_f \rightarrow D_f.$$

Uzasadnij, że jeśli funkcja f jest rosnąca, to g też jest rosnąca.

Wsk. Spróbuj odwrócić implikację $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

130. Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie δ , aby

$$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

a) $f(x) = 2x$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 1/10$;

b*) $f(x) = 1/x$, $x_0 = 4$, $\varepsilon = 1/100$.