

Lista 7-1. Funkcje cd.

131. Udowodnij, że równanie

$$xe^x = 1$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Czy potrafisz je oszacować?

132. Znajdź liczbę całkowitą k taką, że równanie

$$e^x = (x+3)^3$$

ma rozwiązanie w przedziale $[k, k+1]$. A czy potrafisz znaleźć dwie takie liczby całkowite k ?

Oblicz poniższe granice

$$\mathbf{133.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{\sqrt{x^2+x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{4x+1}}.$$

$$\mathbf{134.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x.$$

$$\mathbf{135.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)^{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^{x^2}.$$

$$\mathbf{136.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}.$$

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f , g , h są określone w otoczeniu punktu $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

dla x bliskich x_0 , to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Oblicz granice

$$\mathbf{137.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^3)}{\sqrt{x}}.$$

$$\mathbf{138.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\mathbf{139.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sin(x) + \cos(x)}{x^2}.$$

$$\mathbf{140.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x + \sin(x)}\right)^{x + \cos(x)}.$$