

Lista 8-2. Pochodna funkcji

161. Oblicz pochodną poniższych funkcji:

$$\sin(x)e^x x^3, \quad \sin(e^{x^3}).$$

162. Oblicz pochodną poniższych funkcji:

$$x^{e^x}, \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

163. Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = |x|^3$$

i korzystając z definicji pochodnej zbadaj, czy ta funkcja jest różniczkowalna dla $x = 0$.

164. Oblicz pochodną funkcji

$$\sqrt{\sqrt{1+x^2} - 1}$$

i korzystając z definicji pochodnej zbadaj, czy ta funkcja jest różniczkowalna dla $x = 0$.

165. Niech f i g będą różniczkowalne. Oblicz pochodną następujących funkcji

$$f^2 g, \quad \frac{f^3}{g}, \quad \sin(f - 3g^2), \quad f(g(f)), \quad fg \operatorname{arctg}(f), \quad (\sqrt{f})^g.$$

166. Korzystając ze wzoru $(fg)' = f'g + fg'$ oraz $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ wyprowadź wzór na pochodną ilorazu $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Wsk. $\frac{f}{g} = f \cdot g^{-1}$.

167. Korzystając ze wzoru $\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin(\frac{x-y}{2}) \cos(\frac{x+y}{2})$ oblicz z definicji pochodnej, że $(\sin(x))' = C \cos(x)$, gdzie C jest pewną stałą.

168. Korzystając z tego, że $(\sin(x))' = \cos(x)$ oraz ze wzoru $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ wykaż, że $(\cos x)' = -\sin x$.

169. Chcemy zaokrąglić modułowi *dzióbek*. Niech n będzie liczbą naturalną. Dobrać takie a, b, c zależne od n , aby funkcja

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } |x| \geq 1/n \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Obliczyć f'_n . Naskicować wykres funkcji f_n oraz wykres jej pochodnej.

170. Podać (z wyprowadzeniem i uzasadnieniem) przykład takiego wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, że funkcja $f(x) = W(\{x\})$ jest różniczkowalna.