

Lista 9-1. Tw. Rolle'a i tw. Lagrange'a, reguła de l'Hospitala.

171. Udowodnij, że dla wszystkich rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|\arctg(x) - \arctg(y)| \leq |x - y|.$$

172. Udowodnij, że dla $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$|\tg(x) - \tg(y)| \geq |x - y|.$$

173. Spośród różniczkowalnych funkcji f_1, f_2, f_3 wskazać te, których pochodna musi przyjąć wartość zero w pewnym punkcie, wiedząc że

$$f_1(0) = 2, f_1(1) = -4, f_1(3) = 8;$$

$$f_2(0) = 2, f_2(1) = -4, f_2'(3) = 8;$$

$$f_3(0) = 2, f_3(1) = -4, f_3'(3) > f_3(3).$$

174. Spośród różniczkowalnych funkcji f_1, f_2, f_3, f_4 wskazać te, których pochodna nie może być funkcją stałą, wiedząc że

$$f_1(0) = 2, f_1(1) = 4, f_1(3) = 8;$$

$$f_2(0) = 2, f_2(1) = 4, f_2'(3) = 8;$$

$$f_3(0) = 2, f_3(1) = 4, f_3'(3) < f_3(3);$$

$$f_4(0) = 2, f_4(1) = 4, f_4'(3) > f_4(3).$$

W poniższych zadaniach udziel odpowiedzi TAK lub NIE oraz podaj krótkie uzasadnienie, np. wzór lub szkic funkcji jeśli odpowiedź jest NIE, albo argument jeśli odpowiedź jest TAK.

175. Czy istnieje funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(-1) = f(1) = 1$, $f(0) = 0$ oraz

a) $f'(0) = 0$?

b) $f'(0) = 2023$?

c) $f'(0) = f'(1)$?

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \neq \frac{e}{\pi}$?

e) $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \neq 1$?

176. Czy jeśli funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ oraz $f(2) = 4$, to z tego wynika, że

a) $\exists c \in \mathbb{R} \quad f'(c) = 1$?

b) $\exists c \in \mathbb{R} \quad f'(c) = \frac{\pi}{e}$?

c) $f'(0) = 0$?

d) $\exists c \neq d \quad f(c) = f(d)$?

e) $\exists c \neq d \quad f'(c) = f'(d)$?

Oblicz granice:

177. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$

178. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(\ln x)}{x - e}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}.$

179. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}.$

180. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctg(x) - \frac{\pi}{2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^x.$