

Lista 9-2. Tw. Rolle'a i tw. Lagrange'a, reguła de l'Hospitala.

181. Udowodnij, że

$$x \leq \operatorname{tg}(x)$$

dla $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

182. Udowodnij, że

$$\sin(x) < x$$

dla $x > 0$.

183. Udowodnij, że

$$1 + \ln(x) + x < e^x$$

dla $x > 0$.

Wsk: Dla $x \in (0, 1)$ możesz skorzystać z tego, że $x + 1 \leq e^x$. Przypadek $x \geq 1$ rozważ osobno.

184. Znajdź wzór prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, która jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = \ln(x)$. Naszkicuj wykres tej funkcji oraz uzyskaną styczną. Korzystając z tego, że ta styczna leży nad wykresem tej funkcji uzasadnij, że

$$x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}}$$

dla $x > 0$.

185. Udowodnij, że dla $x > y > 1$

$$y + 2\operatorname{arctg}(x) < x + 2\operatorname{arctg}(y).$$

Wsk. Można to zrobić korzystając z tw. Lagrange'a lub z monotoniczności funkcji.

186. Wyznacz parametr $a > 0$ taki, że granica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

jest skończona i dodatnia.

Niech A będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunki

$$f(3) = 7,$$

$$2 \leq f'(x) \leq 3 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

W poniższych zadaniach wyznacz kresy danych zbiorów.

187. $\sup\{f(5) : f \in A\}, \quad \inf\{f(5) : f \in A\}.$

188. $\sup\{f(2) : f \in A\}, \quad \inf\{f(2) : f \in A\}.$

189. $\sup\{|f(0)| : f \in A\}, \quad \inf\{|f(0)| : f \in A\}.$

190. $\sup\{f(7) - f(0) : f \in A\}, \quad \inf\{f(7) - f(0) : f \in A\}.$