

Powtórzenie.

Ćwiczenia : 19 -29 kwietnia (25.04.2011 - Lany Poniedziałek, 02.05.2011 - Wielka Majówka: nie ma kolokwium)

Poniższe zadania powinny być rozwiązane na tablicy przez studentów w celu uzyskania punktów za aktywność

1. Udowodnij, że $n^3 \leq 3^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

2. Udowodnij, że $n^m \leq 2^n$ dla liczb naturalnych $n \geq m^2$, gdzie $m \geq 4$.

3. Oblicz

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

Wskazówka: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^n (k+1)^3$.

4. Zbadaj wymierność liczby $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

5. Zbadaj czy $(\log_2 3)^2$ jest liczbą naturalną.

6. Która liczba jest większa 7^{19} czy $2^{10} \cdot 5^{19}$?

7. Rozwiąż równanie w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$

$$3 \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

8. Używając metody szacowania udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \leq \sqrt{2}$$

9. Podaj kolejny wyraz ciągu i wzór na wyraz ogólny

$$4, 11, 30, 67, 128, ?$$

10. Udowodnij, że ciąg zadany wzorem rekurencyjnym $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

11. Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{2n}}$$

12. Niech

$$G(1) = 1, \quad G(2) = 6, \quad G(3) = 5, \quad \text{oraz} \quad G(n+3) = 3 \cdot G(n+1) + 2 \cdot G(n) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Udowodnij, że wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$G(n) = 2^n + n \cdot (-1)^n.$$

13. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że

- fałszywe jest $T(3)$,
- fałszywe jest $T(11)$,
- prawdziwe jest $T(9)$,
- dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.

14. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \cdot \sqrt{n^2 + 1} - n^4 - \frac{n^2}{2} \right).$$

15. Znajdź kresy zbioru $\left\{ \frac{\ln n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ i sprawdź czy należą do zbioru.

16. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \quad \text{oraz} \quad \sum \frac{1}{2^{\sqrt{\ln n}}}$$

17. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum \sin \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad \text{oraz} \quad \sum \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

18. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

19. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt{n^3 + 2}}$$

20. Zbadaj zbieżność i znajdź sumę szeregu w zależności od parametru a

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n.$$

21. Rozstrzygnij zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4 + n^2 + 1}$$

w zależności od parametru $p > 0$. Oblicz sumę tego szeregu dla **jednej** spośród tych wartości parametru p , dla których szereg jest zbieżny.