Funkcje cd.

Ćwiczenia tydzień 10: zad. 297-333 Kolokwium 10.05.10 zad 1-333

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ, aby

$$\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

297. $f(x)=2x$, $x_0=5$, $\varepsilon=1/10$ **298.** $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$
299. $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\varepsilon=1/50$ **300.** $f(x)=x^3$, $x_0=0$, $\varepsilon=1/1000$
301. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$ **302.** $f(x)=x^4$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-10}$

Wskazać taką liczbę M, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)|\le M\ .$$

303. $f(x)=\dfrac{2x^4+13x^2+7}{5x^4+x^2+2}$ **304.** $f(x)=\dfrac{5x^4+x^2+2}{2x^4+13x^2+7}$ **305.** $f(x)=e^{\sin x}$
306. $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$ **307.** $f(x)=\dfrac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

308. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000}+2=(1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

309. Dowieść, że równanie

$$x^2=25\pi^2\cdot\cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

310. Dowieść, że równanie

$$xe^x=1$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Czy potrafisz je oszacować?

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

311. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\dfrac{x}{2}$ **312.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ **313.** $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+5x+4}+|x|$
314. $f(x)=\log_4(2^x+8^x)$

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie $k\in\mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta=10^{-k}$ spełniony był warunek

$$\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

315. $f(x)=x^{10}$, $x_0=2$, $\varepsilon=1/10$ **316.** $f(x)=x^{100}$, $x_0=5$, $\varepsilon=10^{-10}$
317. $f(x)=x^{1000}$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)
318. $f(x)=x^{1/10}$, $x_0=1111$, $\varepsilon=10^{-5}$

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje $f,\ g,\ h$ są określone w otoczeniu punktu $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

dla x bliskich x_0, to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)\ .$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

319. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(x^{1000}\right)}{\sqrt{x}}$ **320.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \cdot \left\{\frac{1}{x^{1000}}\right\}$ (uwaga: część ułamkowa)

Korzystając ze zbieżności

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

obliczyć

321. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}}$ **322.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}}$

323. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{x+1}}{(x+1)^x}$ **324.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ **325.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$

326. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot f(x)}$, gdzie $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

327. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}$ **328.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$

Dla podanej funkcji f wyprowadzić oszacowanie postaci

$$|f(x) - f(x_0)| < C \cdot \delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta > 0$ oraz dowolnych $x,\ x_0 \in D_f$ spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$. W czterech zadaniach C jest liczbą rzeczywistą dodatnią, w jednym wyrażeniem zależnym od x_0.

329. $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [1, +\infty)$

330. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$

331. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$

332. $f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$, (tutaj $0 < \delta < 1$)

333. $f(x) = x^3$, $D_f = [-10, 5]$