

## Szeregi potęgowe

Ćwiczenia tydzień 10: zad. 316-342

Kolokwium 10: zad 1-342

Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\begin{aligned}
 316. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n+7} \quad & 317. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} x^n \quad & 318. \sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2} \quad & 319. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+10}{n} x^n \\
 320. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!} x^n
 \end{aligned}$$

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\begin{aligned}
 321. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^{10}} \quad & 322. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} \quad & 323. \sum_{n=0}^{\infty} 50^n x^{2n+5} \quad & 324. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \\
 325. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+n-n}} \quad & 326. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+5} x^{3n+7}}{n \cdot 6^{2n}} \quad & 327. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{(n!)^3} \quad & 328. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+7} x^{6n}}{\sqrt{n}} \\
 329. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^{2^n} \quad & 330. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n x^{3n}}{(81n+2)^n} \quad & 331. \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^2} x^{n^3} \quad & 332. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} x^n}{n^2}
 \end{aligned}$$

Obliczyć sumy szeregów potęgowych

$$333. \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad 334. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} \quad 335. \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \quad 336. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

**337.** Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla  $x = 1$ .

**338.** Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

**339.** Udowodnij, że

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

**340.** Udowodnij, że jeśli szereg potęgowy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  o promieniu zbieżności  $R > 0$  zeruje się dla wszystkich  $|x| < R$ , to  $c_n = 0$  dla  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**341.** Udowodnij, że jeśli  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  dla wszystkich  $|x| < R$ , gdzie  $R > 0$ , to  $a_n = b_n$  dla  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**342.** Podać przykład szeregów potęgowych, takich że  $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = 1$  dla wszystkich  $|x| < 1$ , mimo iż szeregi te nie są funkcjami stałymi.