Powtórzenie II.

Ćwiczenia tydzień 11: zad. 321-350   Kolokwium nr 9, 17.05.2010: zad. 1-333

Poniższe zadania powinny być rozwiązane na tablicy przez studentów w celu uzyskania punktów za aktywność

334. Udowodnij, że $n^m \leq 2^n$ dla liczb naturalnych $n \geq m^2$, gdzie $m \geq 4$.

335. Niech

$G(1) = 1, \quad G(2) = 6, \quad G(3) = 5, \quad$ oraz $\quad G(n+3) = 3\cdot G(n+1) + 2\cdot G(n)$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Udowodnij, że wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$G(n) = 2^n + n \cdot (-1)^n \ .$$

336. Zbadaj czy $(\log_2 3)^2$ jest liczba naturalną.

337. Rozwiąż równanie w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$

$$3\binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

338. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) fałszywe jest $T(3)$,
b) fałszywe jest $T(11)$,
c) prawdziwe jest $T(9)$,
d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.

339. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3 \cdot \sqrt{n^2+1} - n^4 - \frac{n^2}{2} \right) \ .$$

340. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \qquad \text{oraz} \qquad \sum \frac{1}{2^{\sqrt{\ln n}}}$$

341. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{oraz} \qquad \sum \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

342. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

343. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^3+2}}$$

344. Zbadaj zbieżność i znajdź sumę szeregu w zależności od parametru a

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n \ .$$

345. Rozstrzygnij zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4+n^2+1}$$

w zależności od parametru $p > 0$. Oblicz sumę tego szeregu dla **jednej** spośród tych wartości parametru p, dla których szereg jest zbieżny.

346. Znajdź kresy zbioru $\left\{\frac{\ln n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ i sprawdź czy należą do zbioru.

347. Dobierz odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D i udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C \le \frac{x^{2010}+2009x^2+1}{x^{2010}+2009x^{2008}+1} \le D\ .$$

A czy dla $D = 100$ prawa nierówność jest prawdziwa dla każdego x?

348. Dobierz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią δ i udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (8-\delta,\ 8+\delta)$ zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt[3]{x}-2\right| < \frac{1}{100}\ .$$

349. Znajdź granicę

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\ln x} + \frac{e^x}{x^b}$$

w zaleznośći od dodatnich parametrów a, b

350. Zbadaj ciągłość i naszkicuj wykres funkcji

$$f(x) = x^{\{x\}} \cdot x^{\{-x\}}$$