

Pochodna: Twierdzenie Rolle'a i Twierdzenie Lagrange'a.

392. Przyporządkować następującym twierdzeniom podane niżej warunki oraz powiedzieć, co mówi warunek nieprzyporządkowany żadnemu twierdzeniu.

- (i) **Własność Darboux funkcji ciągłych:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to
- (ii) **Własność Darboux pochodnej funkcji:** Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[a, b]$, przy czym w punktach a i b istnieją odpowiednie pochodne jednostronne, to
- (iii) **Twierdzenie Rolle'a:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna na przedziale (a, b) , a ponadto $f(a) = f(b)$, to
- (iv) **Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej rachunku różniczkowego):** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna na przedziale (a, b) , to

$$(4) \quad \forall_{s \in (0,1)} \quad \exists_{t \in (0,1)} \quad f'(a + t(b-a)) = f'(a) + s(f'(b) - f'(a))$$

$$(5) \quad \exists_{t \in (0,1)} \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a + t(b-a))$$

$$(6) \quad \forall_{s \in (0,1)} \quad \exists_{t \in (0,1)} \quad f(a + t(b-a)) = f(a) + s(f(b) - f(a))$$

$$(7) \quad \forall_{t \in (0,1)} \quad \exists_{s \in (0,1)} \quad f(a + t(b-a)) = f(a) + s(f(b) - f(a))$$

$$(8) \quad \exists_{t \in (0,1)} \quad f'(a + t(b-a)) = 0$$

W następującym zadaniu wykorzystać twierdzenie Lagrange'a oraz własność Darboux funkcji ciągłych (przypomnienie: funkcja różniczkowalna jest ciągła).

393. Funkcje $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{12}$ są określone i różniczkowalne na całej prostej rzeczywistej, a ich pochodne są ciągłe. Ponadto

$$\begin{aligned} f_1(3) &= 1, \quad f_1(5) = 2, \\ f_2(0) &= 3, \quad f_2(4) = -1, \\ f_3(-5) &= 0, \quad f_3(15) = 10, \\ f_4(1) &= 2, \quad \forall_x f'_4(x) \neq 1, \\ f_5(0) &= 0, \quad f_5(2) = 10, \quad \forall_x f'_5(x) \neq 2, \\ f_6(0) &= 7, \quad \forall_x f'_6(x) > 2, \\ f_7(3) &= 5, \quad \forall_x f'_7(x) \geq -1, \\ f_8(-2) &= 0, \quad f_8(0) = 10, \quad f_8(3) = 4, \\ f_9(-1) &= 0, \quad f_9(1) = 100, \quad f'_9(3) = 40, \\ f_{10}(1) &= -5, \quad f_{10}(11) = 5, \quad \forall_x 0 < f'_{10}(x) < 2, \\ f_{11}(0) &= 0, \quad f_{11}(100) = 0, \quad \forall_x -1 < f'_{11}(x) < 2, \\ f_{12}(-100) &= -100, \quad f_{12}(100) = 100, \quad \forall_x -100 < f'_{12}(x) < 100. \end{aligned}$$

A) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\forall_x f'_i(x) \neq 0$$

B) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = -1$$

C) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(0) \neq 1$$

D) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(99) > 0$$

E) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = 5$$

F) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = 44$$

G) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f'_i(c) = \frac{1}{2}$$

H) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(1) \neq 8$$

I) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f_i(c) = 13$$

J) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_{c \neq d} f_i(c) = f_i(d) = 7$$

K) Dowieść, że dla co najmniej dziewięciu funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_{c, d} f_i(c) = f'_i(d)$$

**Pochodna funkcji - zastosowania.
Znajdowanie najmniejszej i największej
wartości funkcji na przedziale domkniętym.
Reguła de l'Hospitala.**

394. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie trójkątnej i objętości 1. Który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej?

395. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta u góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrow. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania potrzeba było jak najmniej materiału?

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

396. $x^2 + 2x + 21$, $[-2, 7]$ **397.** $|x^2 - 1| + 3x$, $[-2, 2]$

398. $|x + 1| + x^2$, $[-10, 10]$ **399.** $|10x - 1| + x^3$, $[0, 1]$

400. $\ln x - \frac{x}{10}$, $[1, e^3]$ **401.** $|\sin x| + \frac{x}{2}$, $[0, 2\pi]$

402. $x^{1/x}$, $[2, 4]$ **403.** $3 \sin x + \sin 3x$, $[0, 2\pi]$

Obliczyć granice

404. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ **405.** $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$ **406.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

407. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - x^2 - 2}{x \sin x - x^2}$ **408.** $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$ **409.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

$$\begin{array}{lll}
410. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} & 411. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x} & 412. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \\
413. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} & 414. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2} & 415. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(\ln x)}{x - e} \\
416. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x} & 417. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2} &
\end{array}$$

418. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + 2xe^x - e^{2x}}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

$$419. \text{ Niech } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

$$420. \text{ Niech } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x} & \text{dla } x \notin \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\ A_k & \text{dla } x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Dla których A_k ($k \in \mathbb{Z}$) istnieją $f'(k\pi)$ i ile wynoszą?

$$421. \text{ Niech } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} & \text{dla } x \notin \{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\} \\ A_k & \text{dla } x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Dla których A_k ($k \in \mathbb{Z}$) istnieją $f'(k\pi + \frac{\pi}{2})$ i ile wynoszą?

$$422. \text{ Niech } f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & \text{dla } x \notin \mathbb{Z} \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbb{Z}$, dla których istnieje.

$$423. \text{ Niech } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{7x} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Obliczyć $f'(0)$.

$$424. \text{ Niech } f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sin(\pi x)} & \text{dla } x \notin \mathbb{Z} \\ x^3 - x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbb{Z}$, dla których istnieje.

425. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

426. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunki

$$f(3) = 7$$

$$2 \leq f'(x) \leq 3 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

W każdym z zadań **A-F** podaj odpowiedni kres zbioru.

Za podanie poprawnych odpowiedzi w n zadaniach otrzymasz $\max(0, n-1)$ punktów.

A. $\sup\{f(6) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

B. $\inf\{f(5) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

C. $\sup\{f(2) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

D. $\inf\{f(1) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

E. $\sup\{f(9) - f(4) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

F. $\inf\{f(7) - f(0) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

427. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x^2 + x - \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}$$

na przedziale $\left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

428. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x - 4\sqrt{x} + \ln x$$

na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

429. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = -3x + (x^2 - 6x + 9)^{3/2}$$

na przedziale $[1, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.