

**Pochodne wyższego rzędu.
Wzór Taylora.
Wypukłość funkcji.**

Ćwiczenia tydzień 11 i Kolokwium 11

Obliczyć pochodną rzędu 2 funkcji zmiennej x danej wzorem

368. $(x+1)^6$ **369.** $x^6 - 4x^3 + 4$ **370.** $\frac{1}{1-x}$ **371.** $x^3 \ln x$ **372.** e^{2x-1}

373. $\cos x$ **374.** $(x^2+1)^3$ **375.** e^{x^2} **376.** $\ln(x^2)$ **377.** $(x-7)^{50}$

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu n funkcji zmiennej x danej wzorem

378. $\ln(1-x)$ **379.** $\ln x$ **380.** $\sqrt{x}$ **381.** $\sin x$ **382.** $\cos x$ **383.** $\frac{1+x}{1-x}$

384. xe^x **385.** x^7 **386.** e^{4x} **387.** $x + \frac{1}{x}$ **388.** $\frac{1}{1-x^2}$ **389.** $\sin^2 x$

390. Dowieść, że $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

Obliczyć przybliżone wartości następujących liczb korzystając z trzech wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacować błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

391. $\sqrt{24}$ **392.** $\sqrt[4]{e}$ **393.** $\sqrt[3]{126}$ **394.** $\sqrt[7]{126}$

Znaleźć punkty przegięcia i przedziały wypukłości funkcji danych wzorami:

395. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ **396.** $x^8 - x^2 + 7x - 15$ **397.** e^{-x^2}

398. $\sin^4 x$ **399.** $\sqrt{x} - \ln x$ **400.** $x^4 + \sqrt[4]{x}$

Porównaj dane liczby:

401. $\sin(1) + \sin(3)$ i $2\sin(2)$ **402.** $\sin(4) + \sin(6)$ i $2\sin(5)$ **403.** $2 \cdot 9^{17} + 12^{17}$ i $3 \cdot 10^{17}$

404. $\arctg(2) + \arctg(4)$ i $2\arctg(3)$ **405.** $\arctg(100) + 2\arctg(103) + 3\arctg(106)$ i $6\arctg(104)$

ZADANIA DODATKOWE:

406. Udowodnij, że jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna, to

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

407. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2017 funkcji

$$f(x) = e^x \sin(x\sqrt{3}) .$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków " $\sum$ ", "+", "-".

408. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases} .$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

409. Udowodnij, że jeśli $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = 0$, to f jest funkcją stałą.

410. Udowodnij, że jeśli $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = 1$, to $f(x) = x + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest pewną stałą.

411. Udowodnij, że jeśli f jest funkcją dodatnią i $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = f(x)$, to $f(x) = Ae^x$, gdzie $A \in \mathbb{R}$ jest pewną stałą dodatnią.

412. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz spełnia warunki

$$\begin{aligned} f(1) &= f(2) = 0 \\ f''(x) &= \frac{1}{x^2} \quad \text{dla każdego } x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Wyznaczyć $f(4)$.

413. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunki

$$\begin{aligned} f(0) &= f'(0) = 1 \\ 1 &\leq f''(x) \leq 2 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dobrać odpowiednie liczby C, D , a następnie:

a) Dowieść, że dla dowolnej funkcji $f \in \mathbb{T}$ zachodzi nierówność

$$C \leq f(1) \leq D.$$

b) Wskazać takie funkcje $f_1, f_2 \in \mathbb{T}$, że

$$f_1(1) = C, \quad f_2(1) = D.$$

414. Udowodnij, że jeśli $f'' \geq 1$, to

$$f(1) \leq \frac{f(0) + f(2)}{2} - \frac{1}{2}.$$

415. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

ROZGRZEWKI: Udowodnij, że f jest rosnąca dla $x > 0$.