

Szeregi zespolone

Ćwiczenia tydzień 12: zad. 366-383

Kolokwium 12: zad 1-383

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z , że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n .$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n .$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n .$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R = 0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R = +\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Z badać zbieżność szeregów:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{366.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1} & \mathbf{367.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i} & \mathbf{368.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i} & \mathbf{369.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2 + i} \\ \mathbf{370.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i} & \mathbf{371.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + i}{n^4 - i} & \mathbf{372.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} & \mathbf{373.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n} \end{array}$$

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{374.} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n & \mathbf{375.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2} & \mathbf{376.} \sum_{n=1}^{\infty} n z^n & \mathbf{377.} \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} & \mathbf{378.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n} \\ \mathbf{379.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{n^3 + i} & \mathbf{380.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 z^n}{n^4 + i} & \mathbf{381.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} & \mathbf{382.} \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n) z)^n & \mathbf{383.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n} \end{array}$$