

3. Pochodne wyższego rzędu. Wzór Taylora. Wypukłość funkcji.

Obliczyć pochodną rzędu 2 funkcji zmiennej x danej wzorem

430. $(x+1)^6$ **431.** $x^6 - 4x^3 + 4$ **432.** $\frac{1}{1-x}$ **433.** $x^3 \ln x$ **434.** e^{2x-1}

435. $\cos x$ **436.** $(x^2+1)^3$ **437.** e^{x^2} **438.** $\ln(x^2)$ **439.** $(x-7)^{50}$

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu n funkcji zmiennej x danej wzorem

440. $\ln(1-x)$ **441.** $\ln x$ **442.** $\sqrt{x}$ **443.** $\sin x$ **444.** $\cos x$ **445.** $\frac{1+x}{1-x}$

446. xe^x **447.** x^7 **448.** e^{4x} **449.** $x + \frac{1}{x}$ **450.** $\frac{1}{1-x^2}$ **451.** $\sin^2 x$

452. Dowieść, że $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

Obliczyć przybliżone wartości następujących liczb korzystając z trzech wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacować błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

453. $\sqrt[4]{24}$ **454.** $\sqrt[4]{e}$ **455.** $\sqrt[3]{126}$ **456.** $\sqrt[7]{126}$

Znaleźć punkty przegięcia i przedziały wypukłości funkcji danych wzorami:

457. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ **458.** $x^8 - x^2 + 7x - 15$ **459.** e^{-x^2}

460. $\sin^4 x$ **461.** $\sqrt{x} - \ln x$ **462.** $x^4 + \sqrt[4]{x}$

Porównaj dane liczby:

463. $\sin(1) + \sin(3)$ i $2\sin(2)$ **464.** $\sin(4) + \sin(6)$ i $2\sin(5)$ **465.** $2 \cdot 9^{17} + 12^{17}$ i $3 \cdot 10^{17}$

466. $\arctg(2) + \arctg(4)$ i $2\arctg(3)$ **467.** $\arctg(100) + 2\arctg(103) + 3\arctg(106)$ i $6\arctg(104)$

ZADANIA DODATKOWE:

468. Udowodnij, że jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna, to

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

469. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2017 funkcji

$$f(x) = e^x \sin(x\sqrt{3})$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków " $\sum$ ", "+", "-".

470. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

471. Udowodnij, że jeśli $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = 0$, to f jest funkcją stałą.

472. Udowodnij, że jeśli $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = 1$, to $f(x) = x + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest pewną stałą.

473. Udowodnij, że jeśli f jest funkcją dodatnią i $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = f(x)$, to $f(x) = Ae^x$, gdzie $A \in \mathbb{R}$ jest pewną stałą dodatnią.

474. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz spełnia warunki

$$\begin{aligned} f(1) &= f(2) = 0 \\ f''(x) &= \frac{1}{x^2} \quad \text{dla każdego } x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Wyznaczyć $f(4)$.

475. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunki

$$\begin{aligned} f(0) &= f'(0) = 1 \\ 1 &\leq f''(x) \leq 2 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dobrać odpowiednie liczby C, D , a następnie:

a) Dowieść, że dla dowolnej funkcji $f \in \mathbb{T}$ zachodzi nierówność

$$C \leq f(1) \leq D.$$

b) Wskazać takie funkcje $f_1, f_2 \in \mathbb{T}$, że

$$f_1(1) = C, \quad f_2(1) = D.$$

476. Udowodnij, że jeśli $f'' \geq 1$, to

$$f(1) \leq \frac{f(0) + f(2)}{2} - \frac{1}{2}.$$

477. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

ROZGRZEWKI: Udowodnij, że f jest rosnąca dla $x > 0$.