

Liczby zespolone

Ćwiczenia tydzień 12 i Kolokwium 12

416. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right),$$

jeśli $b \neq 0$.

Rozwiązać równania i układy równań.

417. $\bar{z} = z^2$ 418. $\bar{z} = z^{-1}$ 419. $1+i = z^2$ 420. $3+4i = z^2$
421. $-3+4i = z^2$ 422. $z^2+z=i$ 423. $z^2+iz=1$ 424. $z = \bar{z}+1$
425. $z^2\bar{z} = 8i$ 426. $z^4+10z^2+61=0$
427. $\begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_2^2 = z_1 \end{cases}$ 428. $\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_1 + z_2 = -1 \end{cases}$
429. $\begin{cases} z_1 + iz_2 = 1 \\ z_2 + iz_1 = 2 \end{cases}$ 430. $\begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 1 \\ \bar{z}_1 + z_2 = i \end{cases}$
431. $z^3 = 1$ 432. $z^3 = -1$ 433. $z^3 = i$
434. $z^4 = 1$ 435. $z^4 = -1$ 436. $z^4 = i$
437. $z^5 = 1$ (Wsk. $z^4+z^3+z^2+z+1 = (z^2+az\pm 1)(z^2+bz\pm 1)$)

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

438. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z^2 \geq 0$ 439. $3|z| \leq |z^2| + 1$ 440. $|z| = |\bar{z} + 1|$
441. $|z+i| \leq |z-i|$ 442. $\operatorname{Im} \frac{z}{z^2+1} = 0$ 443. $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z} = 0$

444. W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ = 1$ i $PD = 4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD , punkt A jest środkiem odcinka PC , punkt B jest środkiem odcinka AC . Punkt E leży na prostej PD , przy czym

$$\angle PQA + \angle PQB + \angle PQC = \angle PQD + \angle PQE.$$

Obliczyć PE .