

Liczby zespolone

Ćwiczenia tydzień 13: zad. 378-408

Kolokwium 31.05.10 zad 1-408

378. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right),$$

jeśli $b \neq 0$.

Rozwiązać równania i układy równań.

- 379.** $\bar{z} = z^2$ **380.** $\bar{z} = z^{-1}$ **381.** $1+i = z^2$ **382.** $3+4i = z^2$
383. $-3+4i = z^2$ **384.** $z^2+z = i$ **385.** $z^2+iz = 1$ **386.** $z = \bar{z}+1$
387. $z^2\bar{z} = 8i$ **388.** $z^4+10z^2+61=0$
389. $\begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_2^2 = z_1 \end{cases}$ **390.** $\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_1 + z_2 = -1 \end{cases}$
391. $\begin{cases} z_1 + iz_2 = 1 \\ z_2 + iz_1 = 2 \end{cases}$ **392.** $\begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 1 \\ \bar{z}_1 + z_2 = i \end{cases}$
393. $z^5 = 1$ (**Wsk.** $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + az \pm 1)(z^2 + bz \pm 1)$)

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

- 394.** $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z^2 \geq 0$ **395.** $3|z| \leq |z^2| + 1$ **396.** $|z| = |\bar{z} + 1|$
397. $|z+i| \leq |z-i|$ **398.** $\operatorname{Im} \frac{z}{z^2+1} = 0$ **399.** $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z} = 0$

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty.$$

Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty.$$

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z , że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n .$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} c z_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n .$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n .$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R = 0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R = +\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

$$400. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1} \quad 401. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i} \quad 402. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i} \quad 403. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + i}{n^2 + i}$$

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

$$404. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \quad 405. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2} \quad 406. \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$407. \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \quad 408. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$$