Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

Ćwiczenia tydzień 1: zad. 1-23 Kolokwium nr 1: materiał z zad. 1-23

1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

2. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2 .$$

3. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1 - \frac{1}{n} .$$

4. Dowieść, że $6^n - 1$ dzieli się przez 5, dla każdej liczby naturalnej n.

5. Niech $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = 2a_n + 1$ dla n naturalnych. Znajdź wzór na a_n i udowodnij go indukcyjnie.

6. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n oraz dowolnej liczby $a \geq -1$ zachodzi nierówność

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

7. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n < 2^n + 25$.

8. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + ... + n \cdot 3^{n-1} \geq \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n .$$

9. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$9 \cdot (3n)! \cdot n \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \cdot (3^n \cdot n!)^3 .$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geq$, $\leq$.

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

10. $\sum_{i=3}^{5} \frac{1}{i}$ **11.** $\sum_{i=-9}^{10} i^5$ **12.** $\sum_{i=-6}^{10} 2$ **13.** $\prod_{i=1}^{5} i$ **14.** $\prod_{i=-2010}^{2010} i^{2010}$

15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych k oraz $N \leq M$

$$\sum_{n=N}^{M} a_n = \sum_{n=N-k}^{M-k} a_{n+k}$$

Zapamiętaj:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n \quad \text{ale} \quad 0! = 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{dla} \quad k \leq n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

16. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.
Wskazówka: $(1+1)^{2n}$

17. Dowieść, że

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

18. Wskazać taką liczbę x, że dla dowolnych liczb naturalnych n i $k \leq n-2$ prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + x\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

19. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \quad \binom{100}{27}, \quad \binom{100}{47}, \quad \binom{100}{57}, \quad \binom{100}{77}, \quad \binom{100}{97}.$$

20. Dowieść, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

21. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n} < 7^n$.

22. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 6$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że
a) prawdziwe jest $T(10)$,
b) prawdziwe jest $T(11)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \Rightarrow T(13)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \Rightarrow T(1)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \Rightarrow T(3)$.

23. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(100)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-1)$. Czy można stąd wnioskować, że
a) prawdziwe jest $T(9)$,
b) prawdziwe jest $T(8)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(50) \Rightarrow T(30)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(300) \Rightarrow T(200)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(30) \Rightarrow T(50)$,
f) prawdziwa jest implikacja $T(200) \Rightarrow T(300)$.