

Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Ćwiczenia tydzień 2: zad. 24-40

Kolokwium nr 2, 10.03.2014: materiał z zad. 1-40

24. Dowieść, że liczba $\sqrt{\frac{3}{5}}$ jest niewymierna.
25. Dowieść, że liczba $\log_{12}18$ jest niewymierna.
26. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_23 + \log_45$ jest wymierna, czy niewymierna.
27. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ jest niewymierna.

28. OSZUSTWO

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$w = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w + 1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

29. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

30. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

31. ZAGADKA

O liczbie a wiadomo, że jest niewymierna. O liczbie b wiadomo, że jest wymierna oraz że ab też jest liczbą wymierną. Czy wiesz już jaką liczbą jest b ?

32. Udowodnij, że jeśli $a + 2b$ oraz $3a + b$ są wymierne, to a i b też są wymierne.

33. Sprawdź czy jeśli ab^2 oraz a^3b są niezerowe i wymierne, to a i b też muszą być wymierne.

34. Udowodnij, że jeśli $a^2 + 2a$ oraz a^3 są wymierne, to a też jest wymierna.

35. Udowodnij, że pomiędzy każdymi dwoma liczbami wymiernymi $a < b$ leży liczba wymierna c , tzn. $a < c < b$.

36. Udowodnij, że pomiędzy dowolną liczbą wymierną i niewymierną leży liczba niewymierna.

37. Udowodnij, że pomiędzy każdymi dwoma liczbami niewymiernymi $a < b$ leży liczba wymierna.

Wskazówka: Najpierw zauważ, że istnieje liczba naturalna n , taka że $\frac{1}{n} < b - a$, a potem znajdź najmniejszą liczbę naturalną m , taką że $a < \frac{m}{n}$.

38. Udowodnij, że pomiędzy każdymi dwoma liczbami rzeczywistymi leży liczba wymierna.

Wskazówka: Korzystaj wyłącznie z zadań 35 - 37.

39. Udowodnij, że pomiędzy każdymi dwoma liczbami rzeczywistymi leży liczba niewymierna.

Wskazówka: Użyj poprzedniego zadania i kreatywnego mnożenia.

40. ZADANIE EDUKACYJNE

Spróbuj zbadać, czy liczba $\sqrt{2} + \log_2 3$ jest wymierna. Co Ci podpowiada intuicja?