

Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Ćwiczenia tydzień 2: zad. 24-41

Kolokwium nr 2: materiał z zad. 1-41

24. Dowieść, że liczba $\sqrt{\frac{3}{5}}$ jest niewymierna.

25. Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

26. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

27. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ jest niewymierna.

28. OSZUSTWO

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$w = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w + 1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

29. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

30. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

31. ZAGADKA

O liczbie a wiadomo, że jest niewymierna. O liczbie b wiadomo, że jest wymierna oraz że ab też jest liczba wymierna. Czy wiesz już jaką liczbą jest b ?

32. Udowodnij, że jeśli $a + 2b$ oraz $3a + b$ są wymierne, to a i b też są wymierne.

33. Sprawdź czy jeśli ab^2 oraz a^3b są niezerowe i wymierne, to a i b też muszą być wymierne.

34. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że jeśli $a^{n-1} + \dots + a^2 + a$ oraz a^n są wymierne, to a też jest wymierna.

35. Niech w będzie dowolną liczbą wymierną. Udowodnij, że jeśli $a^2 + wa$ oraz a^3 są wymierne, to a też jest wymierna.

36. Udowodnij, że pomiędzy każdymi dwoma liczbami wymiernymi $a < b$ leży liczba wymierna c , tzn. $a < c < b$.

37. Udowodnij, że pomiędzy każdymi dwoma liczbami rzeczywistymi $a < b$ leży liczba wymierna.

Wskazówka: Najpierw zauważ, że istnieje liczba naturalna n , taka że $\frac{1}{n} < b - a$, a potem znajdź najmniejszą liczbę całkowitą m , taką że $a < \frac{m}{n}$.

38. Udowodnij, że pomiędzy każdymi dwoma liczbami rzeczywistymi leży liczba niewymierna.

Wskazówka: Użyj poprzedniego zadania i kreatywnego mnożenia.

39. O liczbach wymiernych x i y wiadomo, że $x + y$ oraz $x \cdot y$ są całkowite. Udowodnij, że x i y też muszą być całkowite. A co jeśli nie założymy, że x i y są wymierne?

40. ZADANIE Z ♣

Znajdź wszystkie wymierne rozwiązania równania

$$x^y = 5.$$

Zapamiętaj:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

41. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność trójkąta

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

oraz wywnioskuj, że

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$