Szacowania.

Ćwiczenia tydzień 3: zad. 42-67 Kolokwium nr 3: materiał z zad. 1-67

Zapamiętaj: Nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz dowolnych $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$.

42. Udowodnij, że $3 < \pi < 2\sqrt{3}$.

43. Która z liczb jest większa

a) $2^{1000!}$ czy $999^{999!}$?

b) 26^{99} czy 10^{151} ?

c) 26^{99} czy 123^{65} ?

44. Niech $a = \sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{256} \qquad \text{czy} \qquad 256^a \ ?$$

45. Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a = \left(5 - \sqrt{37}\right)^{2008}$$

$$b = \left(6 - \sqrt{37}\right)^{2009}$$

$$c = \left(7 - \sqrt{73}\right)^{2011}$$

$$d = \left(9 - \sqrt{73}\right)^{2013}$$

46. Która z liczb jest większa $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

Uwaga: Zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn.

$$a^{b^c} = a^{(b^c)} \ .$$

47. Która z liczb jest większa $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{9}{4}}$ czy 6 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 100 oraz wolno wykorzystać równości $2^{11} = 2048$ i $3^7 = 2187$.

48. Która z liczb jest większa 45^{13} czy 2^{72} ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 300.

49. Udowodnij, że dla naturalnych $n \geq 4$

$$n^2 \leq 2^n \ .$$

50. Dla ustalonej liczby naturalnej M wskazać taką liczbę naturalną $n > 1$, że

$$n^M \leq 2^n \ .$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą k udowodnić nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

51. $L = 3972^{257}$ **52.** $L = 257^{3972}$ **53.** $L = 700!$

54. Dla dodatnich liczb rzeczywistych a oraz b znajdź ograniczenie dolne wyrażenia

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \, .$$

55. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz b znajdź ograniczenie górne wyrażenia

$$\frac{ab}{a^2 + 4b^2} \ .$$

Wskazując odpowiednie liczby dodatnie C, D udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C < W(n) < D$.

56. $W(n) = \dfrac{n^4 + 16n + 3}{2n^4 + 7n^2}$ **57.** $W(n) = \dfrac{13n^2 - 10n + 3}{2n^2 + 7n - 1}$ **58.** $W(n) = \dfrac{\sqrt{n+7} + 3}{\sqrt{n+3} + 7}$

Wskazując odpowiednie liczby dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k < W(n) < D \cdot n^k \ .$$

59. $W(n) = \dfrac{n^7 + 10n^3 + 3}{n^4 + 37}$ **60.** $W(n) = \dfrac{5n^8 - n^4 + 3}{5n^{10} - 4}$ **61.** $W(n) = \dfrac{n^6 + 2n^4 + 1}{\sqrt{n} + 2}$

Wskazując odpowiednią liczbę dodatnią C udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$1 - \frac{C}{n} < W(n) < 1 + \frac{C}{n} \ .$$

62. $W(n) = \dfrac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 7n + 2}$ **63.** $W(n) = \dfrac{3n^2 - 2n + 3}{3n^2 + 7n - 2}$ **64.** $W(n) = \dfrac{\sqrt{4n^2 + 1}}{2n + 1}$

Wskazując odpowiednie liczby dodatnie C, g udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$g - \frac{C}{n} < W(n) < g + \frac{C}{n} \ .$$

65. $W(n) = \dfrac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 7n + 2}$ **66.** $W(n) = \dfrac{4n^2 - 2n + 3}{2n^2 + 7n - 2}$ **67.** $W(n) = \dfrac{\sqrt{4n^2 + 1}}{3n + 1}$