

## Ciągi.

Ćwiczenia tydzień 4: zad. 76-131

Kolokwium nr 4, 29.03.2010: materiał z zad. 1- 131

### Trochę teorii

DEFINICJA: Ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do granicy  $g$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |a_n - g| < \varepsilon .$$

Piszemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  lub  $a_n \rightarrow g$ .

Ciąg  $(a_n)$  jest **rozbieżny** do  $+\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n > M .$$

Piszemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  lub  $a_n \rightarrow +\infty$  (można też opuścić "+").

Ciąg  $(a_n)$  jest **rozbieżny** do  $-\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n < M .$$

Piszemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  lub  $a_n \rightarrow -\infty$ .

### TWIERDZENIA:

0. CIĄG ZBIEŻNY MA TYLKO JEDNĄ GRANICĘ I JEST OGRANICZONY.

1. MONOTONICZNY CIĄG OGRANICZONY JEST ZBIEŻNY.

2. GRANICA SUMY JEST SUMĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne, to ciąg  $(a_n + b_n)$  jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

3. GRANICA RÓŻNICY JEST RÓŻNICĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne, to ciąg  $(a_n - b_n)$  jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

4. GRANICA ILOCZYNU JEST ILOCZYNEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne, to ciąg  $(a_n b_n)$  jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

5. GRANICA ILORAZU JEST ILORAZEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne, przy czym  $b_n \neq 0$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , to ciąg  $(\frac{a_n}{b_n})$  jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

6. ZBIEŻNOŚĆ I GRANICA NIE ZALEŻĄ OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU.

7. SŁABE NIERÓWNOŚCI ZACHOWUJĄ SIĘ PRZY PRZEJŚCIU DO GRANICY.

Dokładniej, jeśli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne, przy czym  $a_n \leq b_n$  (odpowiednio  $a_n \geq b_n$ ), to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  (odpowiednio  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ).

#### 8. KILKA PODSTAWOWYCH GRANIC.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty \text{ dla } a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \text{ dla } |a| < 1$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  nie istnieje nawet w sensie granicy niewłaściwej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ dla } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

#### 9. Z GRANICĄ MOŻNA WCHODZIĆ POD PIERWIASTEK.

Dokładniej, jeśli ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny, przy czym  $a_n \geq 0$ , to dla  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}.$$

#### 10. TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH.

Jeżeli ciągi  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  spełniają warunek

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi  $(a_n)$  i  $(c_n)$  są zbieżne do tej samej granicy  $g$ , to ciąg  $(b_n)$  też jest zbieżny i jego granicą jest  $g$ .

#### 11. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli  $(a_n)$  jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1,$$

to ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny, a ciąg  $(|a_n|)$  jest rozbieżny do  $+\infty$ .

**Uwaga:** Podstawowym zastosowaniem kryterium d'Alemberta jest badanie zbieżności szeregów, ale podana wyżej wersja stosuje się do badania zbieżności ciągów. O szeregach będzie mowa za kilka tygodni.

**Powyższe własności zachowują się w przypadku ciągów mających granice niewłaściwe (tzn. rozbieżnych do  $\pm\infty$ ), o ile nie prowadzi to do wyrażeń nieoznaczonych.**

#### 13. SZTUCZKI OPARTE NA WZORACH SKRÓCONEGO MNOŻENIA.

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

## Zadania

Podaj kolejny wyraz ciągu i wzór na wyraz ogólny

- 76.** 2, -2, 2, -2, 2, ?    **77.** 4, 7, 10, 13, 16, ?    **78.**  $1, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \frac{81}{16}, ?$   
**79.** 2, 6, 12, 20, 30, ?    **80.**  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, ?$     **81.**  $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{6}, 8, \frac{1}{8}, ?, ?$

**82.** Korzystając z definicji udowodnij, że ciąg  $a_n = \frac{n}{n+2}$  dąży do 1.

**83.** Udowodnij, że  $a_n \rightarrow 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $|a_n| \rightarrow 0$ .

**84.** Udowodnij, że granica sumy ciągów zbieżnych jest sumą ich granic.

**85.** Udowodnij, że granica iloczynu ciągów zbieżnych jest iloczynem ich granic.

**86.** Wiedząc, że  $a_n + b_n \rightarrow 3$  oraz  $2a_n - b_n \rightarrow 3$  udowodnij, że ciągi  $a_n$  i  $b_n$  są zbieżne i znajdź ich granicę.

**87.** Udowodnij, że ciąg zadany wzorem rekurencyjnym  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$  jest monotoniczny i ograniczony. Znajdź jego granicę.

**88.** Udowodnij, że  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$  dla  $a > 0$ .

**89.** Udowodnij, że  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ . (WSKAZÓWKA:  $\frac{c^n}{n} \rightarrow \infty$  więc  $c^n > n$  dla  $c > 1$  i  $n \geq N$ )

Zbadać zbieżność ciągu  $(a_n)$  określonego podanym wzorem; obliczyć granice ciągów zbieżnych, rozstrzygnąć czy ciągi rozbieżne mają granicę niewłaściwą

- 90.**  $\frac{n}{n+7}$     **91.**  $2^n - \frac{1}{n}$     **92.**  $\frac{4n^2+3n}{n+1}$     **93.**  $\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$     **94.**  $\frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$   
**95.**  $\frac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7}$     **96.**  $\frac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7}$     **97.**  $\frac{1-2+3-4+5-6+\dots-2n}{\sqrt{n^2+2}}$   
**98.**  $\frac{1+2+4+\dots+2^n}{1+3+9+\dots+3^n}$     **99.**  $\frac{n}{1+\sqrt{n}}$     **100.**  $n \cdot (-1)^n$     **101.**  $\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$   
**102.**  $\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$     **103.**  $\frac{3^0+3^1+3^2+3^3+\dots+3^n}{3^n}$     **104.**  $\frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$     **105.**  $n^2\sqrt{n}$   
**106.**  $\sqrt[n]{n^2}$     **107.**  $\sqrt[n]{n+17}$     **108.**  $\sqrt{n^2+3n}-n$     **109.**  $n(\sqrt{n^2+7}-n)$   
**110.**  $\frac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$     **111.**  $\frac{(-1)^n}{n}$     **112.**  $\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$   
**113.**  $a_n = \begin{cases} (-1)^n \cdot n! & \text{dla } n \leq 100 \\ \frac{2^n}{2^n+n} & \text{dla } n > 100 \end{cases}$     **114.**  $\frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \frac{n^2+3}{n^3+3} + \dots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$   
**115.**  $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}$     **116.**  $\frac{n^7}{7^n}$     **117.**  $\frac{10^n}{n!}$     **118.**  $\frac{n!}{n^{22}}$   
**119.**  $\frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}}$     **120.**  $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$     **121.**  $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$

### PRAWDA CZY FAŁSZ?

- 122.** Jeżeli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są rozbieżne, to ciąg  $(a_n + b_n)$  jest rozbieżny.
- 123.** Jeżeli ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny, a ciąg  $(b_n)$  rozbieżny, to ciąg  $(a_n + b_n)$  jest rozbieżny.
- 124.** Jeżeli ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny, a ciąg  $(b_n)$  rozbieżny, to ciąg  $(a_n b_n)$  jest rozbieżny.
- 125.** Jeżeli ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny, ciąg  $(b_n)$  rozbieżny, a ponadto obydwie ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg  $(a_n b_n)$  jest rozbieżny.
- 126.** Jeżeli  $(a_n)$  jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.
- 127.** Jeżeli  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$ , to  $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$ .
- 128.** Jeżeli ciąg  $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$  jest zbieżny, to ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny.
- 129.** Jeżeli ciąg  $(a_n^2)$  jest zbieżny, to ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny.
- 130.** Jeżeli wśród wyrazów ciągu  $(a_n)$  występują zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne, to ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny.
- 131.** Jeżeli wśród wyrazów ciągu  $(a_n)$  występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny.