Ciągi.

Ćwiczenia tydzień 3: zad. 76- Kolokwium nr 4, 29.03.2010: materiał z zad. 1-

76. Udowodnij, że $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$.

77. Udowodnij, że $3 < \pi < 2\sqrt{3}$.

78. Która z liczb jest większa

a) $2^{1000!}$ czy $999^{999!}$?

b) 26^{99} czy 10^{151} ?

c) 26^{99} czy 123^{65} ?

79. Niech $a = \sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{256} \qquad \text{czy} \qquad 256^a \ ?$$

80. Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a = \left(5 - \sqrt{37}\right)^{2008}$$

$$b = \left(6 - \sqrt{37}\right)^{2009}$$

$$c = \left(7 - \sqrt{73}\right)^{2011}$$

$$d = \left(9 - \sqrt{73}\right)^{2013}$$

81. Która z liczb jest większa $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

Uwaga: Zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn.

$$a^{b^c} = a^{(b^c)} \ .$$

82. Która z liczb jest większa $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{9}{4}}$ czy 6 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 100 oraz wolno wykorzystać równości $2^{11} = 2048$ i $3^7 = 2187$.

83. Która z liczb jest większa 45^{13} czy 2^{72} ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 300.

84. Udowonij, że dla naturalnych $n \geq 4$

$$n^2 \leq 2^n \ .$$

85. Dla ustalonej liczby naturalnej M wskazać taką liczbę naturalną $n>1$, że
$$n^M \le 2^n .$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą k udowodnić nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

86. $L=3972^{257}$ **87.** $L=257^{3972}$ **88.** $L=700!$

89. Dla dodatnich liczb rzeczywistych a oraz b znajdź ograniczenie dolne wyrażenia
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} .$$

90. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz b znajdź ograniczenie górne wyrażenia
$$\frac{ab}{a^2+4b^2} .$$

Wskazując odpowiednie liczby dodatnie C, D udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C<W(n)<D$.

91. $W(n)=\dfrac{n^4+16n+3}{2n^4+7n^2}$ **92.** $W(n)=\dfrac{13n^2-10n+3}{2n^2+7n-1}$ **93.** $W(n)=\dfrac{\sqrt{n+7}+3}{\sqrt{n+3}+7}$

94. $W(n)=\dfrac{n}{n^2-3n+1}$ **95.** $W(n)=\sqrt{n^2+n}-n$ **96.** $W(n)=\sqrt[3]{n^3+n^2}-n$

Wskazując odpowiednie liczby dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$C\cdot n^k < W(n) < D\cdot n^k .$$

97. $W(n)=\dfrac{n^7+10n^3+3}{n^4+37}$ **98.** $W(n)=\dfrac{5n^8-n^4+3}{5n^{10}-4}$ **99.** $W(n)=\dfrac{n^6+2n^4+1}{\sqrt{n}+2}$

100. $W(n)=\dfrac{n^3+2n^2+1}{\sqrt{n^6+2}+2}$ **101.** $W(n)=\dfrac{2n^3-n^2+1}{\sqrt[3]{n^2+1}+1}$ **102.** $W(n)=\dfrac{\sqrt[5]{n^2+1}}{\sqrt[7]{n^3+1}+1}$

Wskazując odpowiednią liczbę dodatnią C udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$1-\frac{C}{n} < W(n) < 1+\frac{C}{n} .$$

103. $W(n)=\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+7n+2}$ **104.** $W(n)=\dfrac{3n^2-2n+3}{3n^2+7n-2}$ **105.** $W(n)=\dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{2n+1}$

Wskazując odpowiednie liczby dodatnie C, g udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$g-\frac{C}{n} < W(n) < g+\frac{C}{n} .$$

106. $W(n)=\dfrac{2n^2+2n+3}{3n^2+7n+2}$ **107.** $W(n)=\dfrac{4n^2-2n+3}{2n^2+7n-2}$ **108.** $W(n)=\dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{3n+1}$

109. $W(n)=\sqrt{n^2+n}-n$ **110.** $W(n)=\sqrt[3]{n^3+n^2}-n$