

Trochę teorii

DEFINICJA: Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |a_n - g| < \varepsilon.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \rightarrow g$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n > M.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ lub $a_n \rightarrow +\infty$ (można też opuścić "+").

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n < M.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \rightarrow -\infty$.

Twierdzenia:

0. CIĄG ZBIEŻNY MA TYLKO JEDNĄ GRANICĘ I JEST OGRANICZONY.

1. MONOTONICZNY CIĄG OGRANICZONY JEST ZBIEŻNY.

2. GRANICA SUMY JEST SUMĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

3. GRANICA RÓŻNICY JEST RÓŻNICĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n - b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

4. GRANICA ILOCZYNU JEST ILOCZYNEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

5. GRANICA ILORAZU JEST ILORAZEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n \neq 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, to ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

6. ZBIEŻNOŚĆ I GRANICA NIE ZALEŻĄ OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZYNIE WIELU POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU.

7. SŁABE NIERÓWNOŚCI ZACHOWUJĄ SIĘ PRZY PRZEJŚCIU DO GRANICY.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $a_n \leq b_n$ (odpowiednio $a_n \geq b_n$), to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (odpowiednio $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$).

8. KILKA PODSTAWOWYCH GRANIC.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty \text{ dla } a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \text{ dla } |a| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ nie istnieje nawet w sensie granicy niewłaściwej}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ dla } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

9. Z GRANICĄ MOŻNA WCHODZIĆ POD PIERWIASTEK.

Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n \geq 0$, to dla $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}.$$

10. TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH.

Jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g , to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g .

11. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Uwaga: Podstawowym zastosowaniem kryterium d'Alemberta jest badanie zbieżności szeregów, ale podana wyżej wersja stosuje się do badania zbieżności ciągów. O szeregach będzie mowa za kilka tygodni.

Powyższe własności zachowują się w przypadku ciągów mających granice niewłaściwe (tzn. rozbieżnych do $\pm\infty$), o ile nie prowadzi to do wyrażeń nieoznaczonych.

12. SZTUCZKI OPARTE NA WZORACH SKRÓCONEGO MNOŻENIA.

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

Zadania

Podaj kolejny wyraz ciągu i wzór na wyraz ogólny

- 76.** 2, -2, 2, -2, 2, ? **77.** 4, 7, 10, 13, 16, ? **78.** $1, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \frac{81}{16}, ?$
79. 0, 6, 24, 60, 120, 210, ? **80.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, ?$ **81.** $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{6}, 8, \frac{1}{8}, ?, ?$

82. Korzystając z definicji udowodnij, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+2}$ dąży do 1.

83. Udowodnij, że $a_n \rightarrow 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $|a_n| \rightarrow 0$.

84. Wiedząc, że $a_n + b_n \rightarrow 3$ oraz $2a_n - b_n \rightarrow 3$ udowodnij, że ciągi a_n i b_n są zbieżne i znajdź ich granicę.

85. Udowodnij, że ciąg zadany wzorem rekurencyjnym $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ jest monotoniczny i ograniczony. Znajdź jego granicę.

86. Udowodnij, że $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ dla $a > 0$.

87. Udowodnij, że $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. (WSKAZÓWKA: $\frac{c^n}{n} \rightarrow \infty$ więc $c^n > n$ dla $c > 1$ i $n \geq N$)

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego podanym wzorem; obliczyć granice ciągów zbieżnych, rozstrzygnąć czy ciągi rozbieżne mają granicę niewłaściwą

- 88.** $\frac{n}{n+7}$ **89.** $2^n - \frac{1}{n}$ **90.** $\frac{4n^2+3n}{n+1}$ **91.** $\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$ **92.** $\frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$
93. $\frac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7}$ **94.** $\frac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7}$ **95.** $\frac{1-2+3-4+5-6+\dots-2n}{\sqrt{n^2+2}}$
96. $\frac{1+2+4+\dots+2^n}{1+3+9+\dots+3^n}$ **97.** $\frac{n}{1+\sqrt{n}}$ **98.** $n \cdot (-1)^n$ **99.** $\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$
100. $\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ **101.** $\frac{3^0+3^1+3^2+3^3+\dots+3^n}{3^n}$ **102.** $\frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$ **103.** $n^2\sqrt{n}$
104. $\sqrt[n]{n^2}$ **105.** $\sqrt[n]{n+17}$ **106.** $\sqrt{n^2+3n}-n$ **107.** $n(\sqrt{n^2+7}-n)$
108. $\frac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$ **109.** $\frac{(-1)^n}{n}$ **110.** $\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$
111. $a_n = \begin{cases} (-1)^n \cdot n! & \text{dla } n \leq 100 \\ \frac{2^n}{2^n+n} & \text{dla } n > 100 \end{cases}$ **112.** $\frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \frac{n^2+3}{n^3+3} + \dots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$
113. $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}$ **114.** $\frac{n^7}{7^n}$ **115.** $\frac{10^n}{n!}$ **116.** $\frac{n!}{n^{22}}$
117. $\frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}}$ **118.** $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$ **119.** $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$

PRAWDA CZY FAŁSZ?

- 120.** Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- 121.** Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- 122.** Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- 123.** Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwie ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- 124.** Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.
- 125.** Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, to $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$.
- 126.** Jeżeli ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.
- 127.** Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.
- 128.** Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.
- 129.** Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.