Kresy zbiorów.

Ćwiczenia tydzień 5: zad. 130-179 Kolokwium nr 5: materiał zad. 1-179

Wyznaczyć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

130. $\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 < 2\}$ **131.** $\left\{\frac{37^n}{n!}:\ n \in \mathbb{N}\right\}$

132. $\left\{\frac{1}{m} - \frac{n}{n+1}:\ m,n \in \mathbb{N}\right\}$ **133.** $\{x \in \mathbb{R}:\ x^4 \geq 5\}$

134. $\left\{\frac{m^2+n^2}{2mn}:\ m,n \in \mathbb{N}\ ,\ m < n\right\}$ **135.** $\left\{\frac{mnk}{m^3+n^3+k^3}:\ m,n,k \in \mathbb{N}\right\}$

Niech A i B będą niepustymi ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych.
Niech $a_1 = \inf A$, $a_2 = \sup A$, $b_1 = \inf B$, $b_2 = \sup B$. Co można powiedzieć o następujących kresach:

136. $\inf\{-a:\ a \in A\}$ **137.** $\sup\{a^2:\ a \in A\}$ **138.** $\inf\{a^2:\ a \in A\}$

139. $\sup\{a-b:\ a \in A,\ b \in B\}$ **140.** $\sup\{ab:\ a \in A,\ b \in B\}$

141. $\inf\{ab:\ a \in A,\ b \in B\}$

142. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone. Zbiór B jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\{\frac{a}{b}:\ a \in A,\ b \in B\}$ musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

143. A jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A = -3$, $\sup A = 2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a|:\ a \in A\}$? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

144. Podać przykład takich zbiorów A, B, że $\inf A = 2$, $\sup A = 7$, $\inf B = 3$, $\sup B = 10$, $\inf(A \cap B) = 4$, $\sup(A \cap B) = 6$, $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

Wyznaczyć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

145. $\{x^2:\ x \in (-4,\ 9)\}$ **146.** $\left\{\frac{n}{2n+3}:\ n \in \mathbb{N}\right\}$

147. $\left\{\frac{n!}{5^n}:\ n \in \mathbb{N}\right\}$ **148.** $\left\{\binom{2009}{n}:\ n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 2009\right\}$

149. $\left\{\frac{n}{n+m}:\ m,n \in \mathbb{N}\right\}$ **150.** $\left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{3}\right)^2:\ n \in \mathbb{N}\right\}$

151. $\left\{\sqrt{n^2+n} - n:\ n \in \mathbb{N}\right\}$ **152.** $\left\{\sqrt[n]{3} - \sqrt[m]{2}:\ m,n \in \mathbb{N}\right\}$

153. $\left\{\frac{7}{n} - 3m:\ m,n \in \mathbb{N}\right\}$ **154.** $\left\{\frac{m^2+4n^2}{mn}:\ m,n \in \mathbb{N}\right\}$

155. $\left\{\frac{m^2+5n^2}{mn}:\ m,n \in \mathbb{N}\right\}$ **156.** $\left\{\frac{3m^2+7n^2}{mn}:\ m,n \in \mathbb{N}\right\}$

157. $\left\{\left(\sqrt{37}-5\right)^n:\ n \in \mathbb{N}\right\}$ **158.** $\left\{\left(\sqrt{37}-6\right)^n:\ n \in \mathbb{N}\right\}$

159. $\left\{\left(\sqrt{37}-7\right)^n \,:\, n\in\mathbb{N}\right\}$ **160.** $\left\{\left(\sqrt{37}-8\right)^n \,:\, n\in\mathbb{N}\right\}$

161. $\left\{\dfrac{mn}{m^2+n^2+1} \,:\, m,n\in\mathbb{N}\right\}$

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g = \sup A$?

162. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a<g+\varepsilon\right)$

163. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, |a-g|<\varepsilon\right)$

164. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-2\varepsilon\right)$

165. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

166. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\frac{1}{n}\right)$

167. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, n^2(g-a)<\frac{1}{n}\right)$

168. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a< g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, (a-g)^2<\varepsilon\right)$

169. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, (a-g)^2<\varepsilon\right)$

170. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>\varepsilon\right)$

171. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$

172. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{0<\varepsilon<1}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$

173. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a\ge g-\varepsilon\right)$

174. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon\ge0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a\ge g-\varepsilon\right)$

175. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon\ge0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$

176. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\,\underset{b\in A}{\exists}\, b\ge\frac{g+a}{2}\right)$

177. $\left(\underset{a\in A}{\exists}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\,\underset{b\in A}{\exists}\, b\ge\frac{g+a}{2}\right)$

178. $\left(\underset{a\in A}{\exists}\, a^2\ge 0\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\,\underset{b\in A}{\exists}\, b\ge\frac{g+a}{2}\right)$

179. $\left(\underset{a\in A}{\exists}\, a\le g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$