

## Kresy zbiorów.

Ćwiczenia tydzień 6: zad. 140-189

Kolokwium nr 5, 12.04.2010: materiał zad. 1-189

Wyznaczyć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

$$140. \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} \quad 141. \left\{ \frac{37^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$142. \left\{ \frac{1}{m} - \frac{n}{n+1} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 143. \{x \in \mathbb{R} : x^4 \geq 5\}$$

$$144. \left\{ \frac{m^2 + n^2}{2mn} : m, n \in \mathbb{N}, m < n \right\} \quad 145. \left\{ \frac{mnk}{m^3 + n^3 + k^3} : m, n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

Niech  $A$  i  $B$  będą niepustymi ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych. Niech  $a_1 = \inf A$ ,  $a_2 = \sup A$ ,  $b_1 = \inf B$ ,  $b_2 = \sup B$ . Co można powiedzieć o następujących kresach:

$$146. \inf\{-a : a \in A\} \quad 147. \sup\{a^2 : a \in A\} \quad 148. \inf\{a^2 : a \in A\}$$

$$149. \sup\{a - b : a \in A, b \in B\} \quad 150. \sup\{ab : a \in A, b \in B\}$$

$$151. \inf\{ab : a \in A, b \in B\}$$

**152.** Zbiory  $A$  i  $B$  są niepuste i ograniczone. Zbiór  $B$  jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór  $\{\frac{a}{b} : a \in A, b \in B\}$  musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

**153.**  $A$  jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że  $\inf A = -3$ ,  $\sup A = 2$ . Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru  $\{|a| : a \in A\}$ ? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

**154.** Podać przykład takich zbiorów  $A, B$ , że  $\inf A = 2$ ,  $\sup A = 7$ ,  $\inf B = 3$ ,  $\sup B = 10$ ,  $\inf(A \cap B) = 4$ ,  $\sup(A \cap B) = 6$ ,  $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N} = \emptyset$ .

Wyznaczyć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

$$155. \{x^2 : x \in (-4, 9)\} \quad 156. \left\{ \frac{n}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$157. \left\{ \frac{n!}{5^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 158. \left\{ \binom{2009}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 2009 \right\}$$

$$159. \left\{ \frac{n}{n+m} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 160. \left\{ \left( \frac{1}{n} - \frac{2}{3} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$161. \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 162. \left\{ \sqrt[n]{3} - \sqrt[m]{2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$163. \left\{ \frac{7}{n} - 3m : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 164. \left\{ \frac{m^2 + 4n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$165. \left\{ \frac{m^2 + 5n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 166. \left\{ \frac{3m^2 + 7n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$167. \left\{ \left( \sqrt{37} - 5 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 168. \left\{ \left( \sqrt{37} - 6 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$169. \left\{ \left( \sqrt{37} - 7 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 170. \left\{ \left( \sqrt{37} - 8 \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$171. \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że  $g = \sup A$  ?

$$172. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a < g + \varepsilon \right)$$

$$173. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} |a - g| < \varepsilon \right)$$

$$174. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - 2\varepsilon \right)$$

$$175. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$176. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} a > g - \frac{1}{n} \right)$$

$$177. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} n^2(g - a) < \frac{1}{n} \right)$$

$$178. \left( \forall_{a \in A} a < g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a - g)^2 < \varepsilon \right)$$

$$179. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a - g)^2 < \varepsilon \right)$$

$$180. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > \varepsilon \right)$$

$$181. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$$

$$182. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{0 < \varepsilon < 1} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$$

$$183. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon \right)$$

$$184. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon \right)$$

$$185. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$$

$$186. \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$$

$$187. \left( \exists_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$$

$$188. \left( \exists_{a \in A} a^2 \geq 0 \right) \wedge \left( \forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2} \right)$$

$$189. \left( \exists_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left( \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon \right)$$