

Szeregi liczbowe.

Ćwiczenia tydzień 6: zad. 180-216

Kolokwium nr 6: materiał zad. 1-216

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU NIE ZALEŻY OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZYNIE WIELU POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. KRYTERIUM PORÓWNAWCZE.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. KILKA SZEREGÓW.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q .

$\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a .

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a . Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. KRYTERIUM CAUCHY'EGO.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

8. SZEREGI NAPRZEMIENNE - KRYTERIUM LEIBNIZA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{n+1} \text{ jest zbieżny.}$$

Obliczyć $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, a następnie znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$:

$$180. a_k = \frac{1}{7^k} \quad 181. a_k = \frac{2^k + 5^k}{10^k}$$

$$182. \text{Dowieść, że } 4 < \sum_{n=1}^{127} \frac{1}{n} < 7.$$

$$183. \text{Dowieść, że szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \text{ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.}$$

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

$$184. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \quad 185. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \quad 186. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2 + 1} \quad 187. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$$

$$188. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^3 + 6n^2 + 8n + 47} \quad 189. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$$

$$190. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} \quad 191. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \quad 192. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$$

$$193. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \quad 194. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \quad 195. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!} \quad 196. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

$$197. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}} \quad 198. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad 199. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$200. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \quad 201. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \quad 202. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n}$$

$$203. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}} \quad 204. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}} \quad 205. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^e + \pi}{n^\pi + e}$$

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

$$206. a_n > \frac{1}{n} \text{ dla nieskończenie wielu } n, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > 0, \text{ szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny.}$$

207. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.
208. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.
209. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leq 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
210. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n , szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
211. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.
212. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.
213. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
214. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.
215. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.
216. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.