Szeregi liczbowe.

Ćwiczenia tydzień 7: zad. 190-226 Kolokwium nr 6, 19.04.2010: materiał zad. 1-226

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. Warunek konieczny zbieżności.

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. Zbieżność szeregu nie zależy od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. Kryterium porównanwcze.

Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \le b_n$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. Kilka szeregów.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^a n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a. Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. Zbieżność bezwzględna.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

7. Szeregi naprzemienne.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}$ jest zbieżny.

Zadania

Obliczyć $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, a następnie znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

190. $a_k = \frac{1}{7^k}$ **191.** $a_k = \frac{2^k+5^k}{10^k}$

192. Dowieść, że $4 < \sum\limits_{n=1}^{127} \frac{1}{n} < 7$.

193. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

194. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ **195.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ **196.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1}$ **197.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$

198. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47}$ **199.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$

200. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ **201.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ **202.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

203. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ **204.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ **205.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$ **206.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$

207. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}}$ **208.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ **209.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

210. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ **211.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$ **212.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

213. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$ **214.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}}$ **215.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\pi}{n^\pi+e}$

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

216. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n, $\forall\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

217. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

218. $\forall\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

219. $\forall\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \le 100$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

220. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

221. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

222. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

223. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

224. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

225. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

226. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.