

Funkcje cd.

Ćwiczenia tydzień 7 i Kolokwium 7

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie δ , aby

$$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- 218.** $f(x) = 2x$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 1/10$ **219.** $f(x) = 1/x$, $x_0 = 4$, $\varepsilon = 1/100$
220. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 1/50$ **221.** $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/1000$
222. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 30$, $\varepsilon = 1/10$ **223.** $f(x) = x^4$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{-10}$

Wskazać taką liczbę M , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq M.$$

- 224.** $f(x) = \frac{2x^4 + 13x^2 + 7}{5x^4 + x^2 + 2}$ **225.** $f(x) = \frac{5x^4 + x^2 + 2}{2x^4 + 13x^2 + 7}$ **226.** $f(x) = e^{\sin x}$
227. $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$ **228.** $f(x) = \frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

229. Dowieść, że równanie

$$xe^x = 1$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Czy potrafisz je oszacować?

230. Dowieść, że równanie

$$x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

- 231.** $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{x}{2}$ **232.** $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ **233.** $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5x + 4} + |x|$
234. $f(x) = \log_4(2^x + 8^x)$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie $k \in \mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta = 10^{-k}$ spełniony był warunek

$$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- 235.** $f(x) = x^{10}$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 1/10$ **236.** $f(x) = x^{100}$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 10^{-10}$
237. $f(x) = x^{1000}$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)
238. $f(x) = x^{1/10}$, $x_0 = 1111$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f , g , h są określone w otoczeniu punktu $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

dla x bliskich x_0 , to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

239. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^{1000})}{\sqrt{x}}$ **240.** $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\{ \frac{1}{x^{1000}} \right\}$ (uwaga: część ułamkowa)

Korzystając ze zbieżności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

obliczyć

241. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x^2+x}}$ **242.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}}$
243. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x+1}}{(x+1)^x}$ **244.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}}$ **245.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^x$
246. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x \cdot f(x)}$, gdzie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
247. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x} \right)^{(x+1)^x}$ **248.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x} \right)^{(x+1)^{x+1}}$

Dla podanej funkcji f zbadaj czy istnieje stała C taka, że spełniony jest **warunek Lipschitza**:

$$|f(x) - f(y)| < C|x - y| \quad \text{dla dowolnych } x, y \in D_f.$$

249. $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [1, +\infty)$

250. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$

251. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$

252. $f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$

253. $f(x) = x^3$, $D_f = [-10, 5]$