

Funkcje cd.

Ćwiczenia tydzień 9: zad. 279-315

Kolokwium 9: zad 1-315

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie δ , aby

$$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

279. $f(x) = 2x$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 1/10$ **280.** $f(x) = 1/x$, $x_0 = 4$, $\varepsilon = 1/100$

281. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 1/50$ **282.** $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/1000$

283. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 30$, $\varepsilon = 1/10$ **284.** $f(x) = x^4$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{-10}$

Wskazać taką liczbę M , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq M.$$

285. $f(x) = \frac{2x^4 + 13x^2 + 7}{5x^4 + x^2 + 2}$ **286.** $f(x) = \frac{5x^4 + x^2 + 2}{2x^4 + 13x^2 + 7}$ **287.** $f(x) = e^{\sin x}$

288. $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$ **289.** $f(x) = \frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

290. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000} + 2 = (1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

291. Dowieść, że równanie

$$x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

292. Dowieść, że równanie

$$xe^x = 1$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Czy potrafisz je oszacować?

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

293. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{x}{2}$ **294.** $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ **295.** $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5x + 4} + |x|$

296. $f(x) = \log_4(2^x + 8^x)$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie $k \in \mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta = 10^{-k}$ spełniony był warunek

$$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

297. $f(x) = x^{10}$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 1/10$ **298.** $f(x) = x^{100}$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 10^{-10}$

299. $f(x) = x^{1000}$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)

300. $f(x) = x^{1/10}$, $x_0 = 1111$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f , g , h są określone w otoczeniu punktu $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

dla x bliskich x_0 , to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

$$\mathbf{301.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^{1000})}{\sqrt{x}} \quad \mathbf{302.} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\{ \frac{1}{x^{1000}} \right\} \text{ (uwaga: część ułamkowa)}$$

Korzystając ze zbieżności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

obliczyć

$$\begin{aligned} \mathbf{303.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x^2+x}} & \quad \mathbf{304.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}} \\ \mathbf{305.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x+1}}{(x+1)^x} & \quad \mathbf{306.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \quad \mathbf{307.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^x \\ \mathbf{308.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x \cdot f(x)} & \quad , \text{ gdzie } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \\ \mathbf{309.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x} \right)^{(x+1)^x} & \quad \mathbf{310.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x} \right)^{(x+1)^{x+1}} \end{aligned}$$

Dla podanej funkcji f zbadaj czy istnieje stała C taka, że spełniony jest **warunek Lipschitza**:

$$|f(x) - f(y)| < C|x - y| \quad \text{dla dowolnych } x, y \in D_f.$$

$$\mathbf{311.} f(x) = \sqrt{x}, D_f = [1, +\infty)$$

$$\mathbf{312.} f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, D_f = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{313.} f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, D_f = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{314.} f(x) = x^3, D_f = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{315.} f(x) = x^3, D_f = [-10, 5]$$