Powtórzenie.

Ćwiczenia: 25-29 marca (01.04.2013 - Lany Poniedziałek & Prima Aprilis: nie ma kolokwium)

Poniższe zadania powinny być rozwiązane na tablicy przez studentów np. w celu uzyskania punktów za aktywność

1. Udowodnij, że $n^3 \leq 3^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

2. Udowodnij, że $n^m \leq 2^n$ dla liczb naturalnych $n \geq m^2$, gdzie $m \geq 4$.

3. Oblicz

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Wskazówka: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3$.

4. Zbadaj wymierność liczby $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

5. Zbadaj czy $(\log_2 3)^2$ jest liczba naturalną.

6. Która liczba jest większa 7^{19} czy $2^{10} \cdot 5^{19}$?

7. Rozwiąż równanie w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$

$$3\binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

8. Używając metody szacowania udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \leq \sqrt{2}$$

9. Podaj kolejny wyraz ciągu i wzór na wyraz ogólny

$$4, 11, 30, 67, 128, ?$$

10. Udowodnij, że ciąg zadany wzorem rekurencyjnym $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

11. Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{2n}}$$

12. Niech

$G(1) = 1, \quad G(2) = 6, \quad G(3) = 5, \quad$ oraz $\quad G(n+3) = 3 \cdot G(n+1) + 2 \cdot G(n) \quad$ dla $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Udowodnij, że wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$G(n) = 2^n + n \cdot (-1)^n \ .$$

13. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) fałszywe jest $T(3)$,
b) fałszywe jest $T(11)$,
c) prawdziwe jest $T(9)$,
d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.

14. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3 \cdot \sqrt{n^2+1} - n^4 - \frac{n^2}{2} \right) \ .$$