Szeregi potęgowe

1. Oblicz sumę szeregu (potęgowego) i znajdź jego obszar zbieżności (przedział zbieżności)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \infty & a \geq 1 \\ \frac{1}{1-a} & |a| < 1 \\ \text{rozbieżny} & a \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \leftarrow \text{suma szeregu geometrycznego}$$

Szereg geometryczny

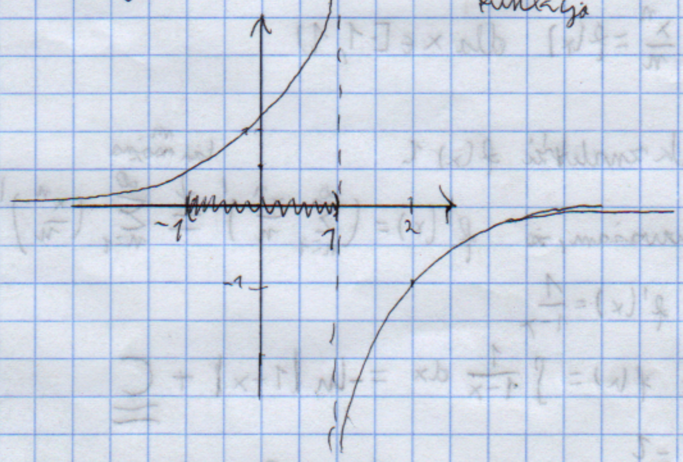
$$\sum_{n=N}^{\infty} a^n = \frac{a^N}{1-a} \qquad |a|<1$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} c\,a^n = c\,\frac{a^N}{1-a}$$

Wniosek: Zastępujemy parametr a zmienną x i otrzymamy, że:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x) \quad \text{dla } |x|<1$$

← funkcja



$f(1) = \pm\infty$

$f(-1) = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$

ale dla $x=-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \leftarrow \text{Rozbieżna}$$

Jak wyznaczyć przedział zbieżności szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \; ?$$

Należy użyć kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego

np. Cauchy $\sqrt[n]{|x^n|} = |x| \quad \lim_{n\to\infty} |x| = |x| < 1$

Czyli $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ jest Z dla $|x|<1$ i Rozbieżny dla $|x|>1$

Czyli promień zbieżności tego szeregu to $R=1$ (rozbieżny -1 zbieżny 1 rozbieżny ; ? ?)

a dla $x=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \infty \text{ — Rozbieżny}$$

<u>Odp.</u> $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dla $x \in (-1, 1)$

promień zbieżności

przedział zbieżności

dla $x=-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ — Rozbieżny}$$