1. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego (3p.) i przedział zb. (2p.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^{10}}$$

Aby znaleźć R stosujemy kryt. Cauchy'ego

$$\sqrt[n]{\left|\frac{10^n x^n}{n^{10}}\right|} = \frac{10|x|}{\sqrt[n]{n^{10}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} 10|x| < 1 \leftarrow \text{Trzeba rozwiązać ze względu na } x$$

$$|x| < \frac{1}{10} = R \text{ - promień zbieżności}$$

$\mapsto$ Nasz szereg jest zbieżny dla $|x| < \frac{1}{10}$ i rozbieżny dla $|x| > \frac{1}{10}$

rozb. | zbieżny | rozbieżny
$-\frac{1}{10}$? , $\frac{1}{10}$?

Badamy zbieżność szeregu dla $x = \frac{1}{10}$ i $x = -\frac{1}{10}$, aby wyznaczyć przedział zbieżności

Można to zrobić osobno

dla $x = \frac{1}{10}$ $\quad \sum \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot 10^n}{n^{10}} = \sum \frac{1}{n^{10}} \leftarrow$ zbieżny

dla $x = -\frac{1}{10}$ $\quad \sum \frac{10^n \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^n}{n^{10}} = \sum \frac{(-1)^n}{n^{10}} \leftarrow$ zbieżny

W tym wypadku można to robić też zbiorczo

dla $|x| = \frac{1}{10}$ $\left(x = \pm\frac{1}{10}\right)$ $\quad \sum \left|\frac{10^n x^n}{n^{10}}\right| = \sum \frac{10^n |x|^n}{n^{10}} = \sum \frac{1}{n^{10}} \leftarrow$ zbieżny

Odp. $R = \frac{1}{10}$, a przedział zbieżności to $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$

2. Rozwiń w szereg potęgowy funkcję $f(x) = \sqrt{1-x}$

Korzystając ze wzoru $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$

Najpierw szukamy wzoru na n-tą pochodną

$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)$

$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1) \cdot (-1)$

$f'''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) \cdot (1-x)^{-\frac{5}{2}} (-1) \cdot (-1)$

$f^{IV}(x) = (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \cdot (-1) \cdot (1-x)^{-\frac{7}{2}}$

$f^{(n)}(x) = -\frac{(2n-3)!!}{2^n} \cdot (1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}$

Teraz sprawdzam dla jakich n ten wzór jest poprawny

sprawdzamy od $n=0$ pamiętając, że $f^{(0)} = f$

dla $n=0$ wzór nie działa i mamy, że $f^{(0)}(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$

dla $n=1$ wzór nie działa i mamy, że $f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

dla $n \geq 2$ wzór jest OK ✓

Wniosek: $f^{(0)}(0) = 1$

$f^{(1)}(0) = -\frac{1}{2}$

$f^{(n)}(0) = -\left(\frac{(2n-3)!!}{2^n}\right)$