2. Oblicz sumę szeregu potęgowego i znajdź jego przedział zbieżności.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = f(x) \quad \text{dla } x \in \_\_\_\_\_\_$$

Najpierw szukamy przedziału zbieżności

Cauchy: $\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow |x| < 1$ czyli szereg jest Z dla $|x|<1$

i rozb. dla $|x|>1$

Teraz badamy co się dzieje z szeregiem dla $x = \pm R = \pm 1$

więc promień zbieżności $R=1$

dla $x=1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} \leftarrow$ Rozbieżny z kryt. p

dla $x=-1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \leftarrow$ zbieżny z kryt. Leibniza

Czyli przedział zbieżności to $[-1, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = f(x) \quad \text{dla } x \in [-1, 1)$$

Jak znaleźć $f(x)$?

Zauważam, że $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' \overset{\text{tak można}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

czyli: $f'(x) = \frac{1}{1-x}$

więc $f(x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| + \underline{\underline{C}}$ C - stała

$C = ?$

$$f(x) = -\ln|1-x| + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

(*) $f(0) = -\ln|1| + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$ bo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

Dygresja $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dla

$x=0$ mamy $\sum_{n=0}^{\infty} 0^n = \frac{1}{1-0} = 1 = \cancel{0^0+0^1+0^2+0^3+\dots = 1+0+0+0+\dots = 1}$

bo $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

W ogólności mamy, że dla szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n = a_0$

$x^0 = 1$ dla $x \neq 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

z (*) $-\ln|1| + C = 0$ $C = 0$

$C = 0$

Odp. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x|$ dla $x \in [-1, 1)$