$$\sqrt{1-x} = f(x) = \sum_{n=\boxed{0}}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n=\boxed{2}}^{\infty} -\frac{(2n-3)!!}{2^n\cdot n!}\cdot x^n = 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2^n\cdot n!}\cdot x^n$$

(1) Znajdź promień zbieżności szeregu i jego przedział zbieżności

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n!\cdot x^n}{n!\,(3n-n)!\cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!\cdot x^n}{n!\,(2n)!\,n^2}$$

By wyznaczyć R użyjemy d'Alemberta

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(3n+3)!\cdot x^{n+1}}{(n+1)!\cdot(2n+2)!\cdot(n+1)^2}\right|\cdot\frac{n!\cdot(2n)!\cdot \cancel{x}\,n^2}{(3n)!\cdot x^n} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\;|x|}{(n+1)(2n+2)(2n+1)}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} |x|\cdot\frac{27}{4} < 1$$

$$|x|\cdot\frac{27}{4} < 1 \iff |x| < \frac{4}{27} = R \leftarrow \text{promień zbieżności}$$

~~rozb.~~ $-\frac{4}{27}$ zbieżny $\frac{4}{27}$ rozb.

Aby wyznaczyć przedział zbieżności zauważam, że dla:

$$|x| = R = \frac{4}{27} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\binom{3n}{n}\cdot x^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\left(\frac{4}{27}\right)^n}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ – zbieżny}$$

„za trudne na kolokwium"

Trzeba byłoby pokazać, że:

$$\binom{3n}{n}\left(\frac{4}{27}\right)^n \le 1$$

$$\binom{3n}{n} \leqslant \left(\frac{27}{4}\right)^n$$ co można wykazać indukcją matematyczną

Odp. $R = \frac{4}{27}$ i pr. zb. to $\left[-\frac{4}{27}, \frac{4}{27}\right]$

(2.) Rozwiń w szereg potęgowy $f(x) = \ln(1+x)$

Korzystając ze wzoru $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$ (lub sprytu)

W tym wypadku można użyć sprytu

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \left\{\frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \;\text{ dla } |a|<1\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$f(x) = \int f'(x) = \int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^n\,dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] + C$$

Na koniec liczymy C. Wiemy, że $f(0) = \ln(1+0) = 0$

a dla $x=0$ (w szeregu) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$

więc $0 = 0 + C$
$C = 0$

$$\text{Odp. } f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

A najłatwiej jest rozwiązać te zadanie korzystając z wyuczonych (na zajęciach) wzorów:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \ln(1-x)$$

$$f(x) = \ln(1+x) = \ln(1-(-x)) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x)^n}{n}$$

nie ma znaczenia, czy $(-1)^{n+1}$ czy $(-1)^{n-1}$