Bonus: Czyli dla $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln|1-x| = -\ln|2| = \ln\frac{1}{2}$

więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots = \ln 2$

3. Oblicz sumę szeregu potęgowego i wyznacz przedział zbieżności

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdot x^n = f(x)$ dla $x \in \underbrace{\quad ? \quad}$

Wyznaczamy promień zbieżności

Z kryt. Cauchy'ego: $\sqrt[n]{|(n+1)\cdot x^n|} = |x|\cdot\sqrt[n]{n+1} \to |x|<1$

Czyli $R = 1$ rozb. zbieżny rozb.

-1 ? 1 ?

Teraz przedział

dla $x = \pm 1$ $\sum_{n=0}$ to

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdot x^n$ jest rozbieżny, bo ~~$(n+1) \to \infty \neq 0$~~

bo wtedy $\lim_{n\to\infty} |(n+1)\cdot x^n| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \neq 0$

czyli przedział zb. to $(-1,1)$

$\sum (n+1)x^n = f(x)$ dla $x \in (-1,1)$

A jak znaleźć f?

$$\int f(x)\,dx = \int \sum (n+1)x^n\,dx \overset{\text{tak też można}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int (n+1)\cdot x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

czyli $\int f(x)\,dx = \frac{x}{1-x}$ $(+C)$

stąd $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1\cdot(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x^2-2x+1}$

Odp. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{\cancel{(1+x)}(1-x)^2}$ dla $x \in (-1,1)$

Bonus: Oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Dla $x = \frac{1}{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$

$$4 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} + \overbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}^{2}$$

stąd $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \underline{\underline{2}}$