(1) ~~Wy~~ Wyznacz promień zbieżności i przedział zb. szeregu

$\sum \frac{x^{3n}}{\sqrt[3]{n}\, 3^n}$ Korzystamy z kryt. Cauchyego

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^{3n}}{\sqrt[3]{n}\cdot 3^n}\right|} = \frac{|x|^3}{3}\cdot\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{3}}} = \frac{|x|^3}{3} < 1$$

$|x|^3 < 3$

$|x| < \sqrt[3]{3} = R$ promień zbieżności

Badamy co się dzieje w $|x| = \sqrt[3]{3}$

Tutaj, trzeba zbadać osobno dwa przypadki

dla $x = \sqrt[3]{3}$ $\quad \sum \frac{x^{3n}}{\sqrt[3]{n}\, 3^n} = \sum \frac{3^n}{3^n \cdot \sqrt[3]{n}} = \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ← rozb. z kryt. p

dla $x = -\sqrt[3]{3}$ $\quad \sum \frac{(-1)^{3n}\cdot 3^n}{\sqrt[3]{n}\cdot 3^n} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ ← zbieżny z kryt. Leibniza.

bo $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \searrow 0$

Odp. $R = \sqrt[3]{3}$, przedział zbieżności to $[-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$

(2) Rozwiń w szereg potęgowy funkcję $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

Wskazówka: rozłóż f na ułamki proste.

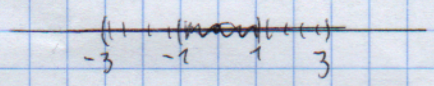
$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \left\{\frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, |a|<1\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$$ ← pr. zb = 1

Natomiast

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$$ ← pr. zbieżn = 3

Stąd $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x+1)}\right) = \frac{1}{4}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right) = \frac{(-1)}{4}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n\right)\cdot x^n\right)$



(4) Wyznacz promień zbieżności (3p) i prz. zb. (2p) szeregu

$\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$

Kryt. Cauchyego

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot x^n\right|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot|x| \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} \frac{1}{e}|x| < 1$$

$|x| < e = R$

Badam $x = e$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot e^n$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot e^n = \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot e\right)^n = \left(\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n\cdot e\right)^n = \left(\frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right)^n = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e \text{ (rośnie)} \quad \text{czyli } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e\ \forall_{n\in\mathbb{N}^+}\right\}$$

$\left(\frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right)^n > 1^n \not\to 0$ więc $\sum$ jest R, na lewym końcu podobnie. Wyraz ogólny nie dąży do zera