4. Oblicz sumę szeregu potęgowego i znajdź przedział zbieżności

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n}$$

A. Tradycyjnie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum \frac{x^{3n}}{3^n} \leftarrow \text{Czy to szereg potęgowy?}$$

TAK

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n} = \underset{a_0}{1} + \underset{a_1}{0} \cdot x + \underset{a_2}{0} \cdot x^2 + \frac{x^3}{3} + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + \frac{x^6}{9}$$

udajemy

Wyznaczamy pr. zb. z kryt. Cauchy'ego

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^{3n}}{3^n}\right|} = \left|\frac{x^3}{3}\right| = \frac{|x|^3}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} \frac{|x|^3}{3} < 1$$

Czyli szereg jest z dla $|x|^3 < 3$

i rozb. dla $|x|^3 > 3$

Pr. zb.:

$\frac{|x|^3}{3} < 1$

$|x|^3 < 3$

$|x| < \sqrt[3]{3} = R$

Czyli $R = \sqrt[3]{3}$ i szereg jest zbieżny dla $x \in (-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$?

A dla $|x| = R$

$\sum^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n}$ jest Rozbieżny, bo $\left|\frac{x^{3n}}{3^n}\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3}\right)^n\right| = \left(\frac{3}{3}\right)^n = 1 \to 1 \neq 0$

Czyli przedział zbieżności to $(-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$

B. Sprytnie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^3}{3}\right)^n = \left\{ \sum_{\substack{n=0 \\ |x|<1}}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \right\} = \frac{1}{1-\frac{x^3}{3}}$ dla $\left|\frac{x^3}{3}\right| < 1$

Odp. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{x^3}{3}}$ dla $|x| < \sqrt[3]{3} = R$

czyli przedział zb. $x \in (-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}) \leftarrow$ prz. zb.

R

~~5. Znajdź~~