dla $x = -e$ $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \cdot (-e)^n \leftarrow$ Rozbieżny

bo $\left| \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \cdot (-e)^n \right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \cdot e^n > 1$ czyli wyraz ogólny nie dąży do 0

Odp. $R = e$ prz. zb. $= (-e, e)$

2. Rozwiń w szereg potęgowy funkcję ~~sin x~~ $f(x) = \sin(x)$

i zróżniczkuj ten szereg aby otrzymać rozwinięcie szer. pot. funkcji $\cos(x)$

Przypomnienie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$. Obliczamy n-tą pochodną

$f(x) = \sin(x)$ ~~$f'(x)$~~ $f^{(0)}(0) = \sin(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ $f^{(1)}(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$ $f^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x)$ $f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$

$f''''(x) = \sin(x) = f(x)$ $f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos(x) = f'(x)$ $f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$

itd. itd.

$f^{(2k)} = 0$ parzyste się zerują $k \geq 1$

$f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k+1}$

lub

$f^{(2k+1)} = (-1)^k$ $k \geq 0$

Więc

$$\sin(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \Big\{ \overbrace{\sum_{n-\text{parzyste}}^{\infty}}^{0} + \sum_{\substack{n-\text{nieparz.}\\ n=2k+1}}^{\infty} \Big\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \frac{1}{9!} \cdot x^9 - \ldots$$

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

(4) Oblicz promień i przedział zbieżności

$$\sum \frac{\ln(3^n + 2^n)}{n^2} x^n$$

Z Cauchy'ego

$$\sqrt[n]{\left|\frac{\ln(3^n+2^n)}{n^2} \cdot x^n\right|} = |x| \cdot \frac{\sqrt[n]{\ln(3^n+2^n)}}{(\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow |x| \cdot 1 < 1 = R \leftarrow \text{pr. zbieżności}$$

bo $\sqrt[n]{\ln(3^n+2^n)} \to 1$

$$\sqrt[n]{\ln(3^n)} \leq \sqrt[n]{\ln(3^n+2^n)} \leq \sqrt[n]{\ln(2 \cdot 3^n)} \to 1$$

$$\sqrt[n]{\ln(3^n)} = \sqrt[n]{n \cdot \ln(3)} \to 1$$

A dla $x = 1$ $\sum \frac{\ln(3^n+2^n)}{n^2} \approx \sum \frac{\ln(3^n)}{n^2} = \sum \frac{n \ln(3)}{n^2} = \sum \ln(3) \cdot \frac{1}{n} \leftarrow$ rozbieżny

a dla $x = -1$ $\sum (-1)^n \cdot \frac{\ln(3^n+2^n)}{n^2}$ jest zb. z kryt. Leibniza, bo

$$b_n = \frac{\ln(3^n+2^n)}{n^2} \approx \frac{1}{n} \to 0$$