5. Znajdź szereg potęgowy $\sum a_n x^n$ t, że:

$$e^x = \sum a_n x^n$$

~~Jakt~~ Jak to zrobić

Fakt: Czasami (dla "miłych" funkcji) mamy, że:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Szereg ~~T~~ Taylora = Szereg Maclaurena

Czyli $f(x) = e^x \quad f^{(n)}(x) = ??$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x \quad f^{(n)}(x) = e^x$

$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$$e^x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$$

Wniosek:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{dla } x \in$$

Kryt. d'Alemberta

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} 0 < 1$$

Wniosek, szereg jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$

6. Użyj ~~wzor~~ szeregu Taylora, aby rozwinąć w szereg pot. ~~w~~ funkcję

$f(x) = \frac{1}{1-x}$

$f'(x) = ((1-x)^{-1})' = (\cancel{-1})(1-x)^{-2} \cdot (\cancel{-1})$

$f''(x) = +2(1-x)^{-3} \cdot (\cancel{-1})$

$f'''(x) = \cancel{+}2 \cdot 3(1-x)^{-4} \cdot (+1)$

$f^{IV}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4(1-x)^{-5}(-1)$

$f^{(n)} = n!(1-x)^{-(n+1)}$

$f^{(n)}(0) = n!(1-0)^{-(n+1)} = n!$

$$\frac{1}{1-x} = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{dla } x \in (-1;1) \leftarrow \text{prz. zb.}$$

$R = 1$