oraz jest nierosnący, bo $b_n = \frac{\ln(3^n \cdot [1+\frac{2}{3}]^n)}{n^2} = \frac{\ln(3^n) + \ln(1+(\frac{2}{3}))^n}{n^2} = \underbrace{\frac{\ln(3)}{n}}_{\text{malejący}} + \underbrace{\frac{\ln(1+(\frac{2}{3})^n)}{n^2}}_{\text{malejący}}$ ← maleje ← rośnie

inne metody: $b_n \geq b_{n+1}$

albo zdefiniować $f(x) = b_x = \frac{\ln(3^x + 2^x)}{x^2}$ i pokazać, że $f'(x) \leq 0$

Odp. $R=1$, a prz. zb. to $[-1,1)$

(2) Rozwiń w szereg potęgowy funkcję $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$

Bonus: znajdź wzór na π

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \left\{ \frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, |a|<1 \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$

stąd $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \sum_{n=0} (-1)^n \cdot x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \cdot x^{2n}\,dx = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) + C$

Wyliczamy C $x=0$ to $f(0) = \operatorname{arctg}(0) = 0$ oraz $\sum (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 0$

więc $0 = 0 + C$
$C = 0$

Odp. $f(x) = \operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Wyznaczmy jeszcze przedział zb. $\sqrt[n]{\left|(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|} = \frac{|x|^{2+\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{(2n+1)}} \longrightarrow |x|^2 < 1$
$|x| < 1$

Cauchy

a dla $x=1$

$\sum (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ ← zb. z kryt. Leibniza

dla $x=-1$

$\sum (-1)^n \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ ← też zbieżny

$R=1$, a przedział zbieżności to $[-1,1]$

i dla $x=1$ otrzymujemy bonus

$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = \sum (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

czyli $\pi = 4 \cdot \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} = 4 \cdot (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots)$