

1. Pochodna funkcji. Twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a.

445. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Korzystając z **definicji** pochodnej obliczyć $f'(8)$.

446. Niech $f(x) = x^5$. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na $f'(x)$.

447. Korzystając z **definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

448. Chcemy zaokrąglić modułowi *dzióbek*. Niech n będzie liczbą naturalną. Dobrać takie a, b, c zależne od n , aby funkcja

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } |x| \geq 1/n \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Obliczyć f'_n . Naszkicować wykres funkcji f_n oraz wykres jej pochodnej.

Zadania 449-496 to zadania do samodzielnego rozwiązania. Na ćwiczeniach będą rozwiązane tylko zadania sprawiające kłopoty.

Obliczyć pochodną funkcji zmiennej x o podanym wzorze. Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna.

Wskazówka: $A^B = e^{B \ln A}$.

Uwaga: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

449. $3x^{33} - 5x + 1$ 450. $(\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$ 451. $\frac{1 - x^3}{1 + x^3}$ 452. $(x^5 + 1)^{20}$

453. $(1 + \sqrt{x})(1 + x^{1/3})(1 + x^{1/4})$ 454. $\frac{x + 1}{x - 1}$ 455. $\frac{x}{x^2 + 1}$ 456. $(1 + 2x)^{30}$

457. $\left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^{1/3}$ 458. $\frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$ 459. 2^{x+3} 460. $x10^x$ 461. $\frac{x}{e^x}$

462. $x^2(x + 1)e^x$ 463. $e^x \ln x$ 464. $\frac{\ln x}{e^x}$ 465. e^{x^2} 466. $x^{10} \ln x$

467. e^{e^x} 468. $\ln \ln x$ 469. $\log_{10}(x - 1)$ 470. 10^{2x-3} 471. 2^{3^x}

472. $\log_2 |\log_3 (\log_5 x)|$ 473. $e^{\sqrt{\ln x}}$ 474. x^{x^2} 475. x^{x^x} 476. $x^{\sqrt{x}}$

477. $(\ln x)^x$ 478. $e^{-x^2} \ln x$ 479. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}$ 480. $x^5(x^6 - 8)^{1/3}$

481. $e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$ 482. $\ln \frac{1}{1+x}$ 483. $\frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$ 484. $|x|^3$

485. $\operatorname{sgn}(x)$ 486. 0 dla $x < 0$, x^2 dla $x \geq 0$ 487. $e^{-|x|}$ 488. $\sqrt{\sqrt{1+x^2} - 1}$

489. $\{x\}$ 490. x dla $x < 0$, x^2 dla $x \geq 0$ 491. $\operatorname{sgn}(x^5 - x^3)$ 492. $\frac{\pi^{10}}{x - e}$

493. e^x dla $x < 0$, $1 + x$ dla $x \geq 0$ 494. $x^7 + e^2$ 495. $(x + e)^{20}$ 496. e^e

497. Dla danych różnych liczb rzeczywistych a i b oraz zbioru $Z \subset \mathbb{R}$ chcemy formalnie zapisać warunek, że istnieje w zbiorze Z liczba (ostro) między a i b , nie wiemy jednak z góry, która z liczb a, b jest większa. Które z podanych warunków są do tego celu odpowiednie?

$$\begin{array}{ll}
(\clubsuit) & \exists_{c \in \mathbb{Z}} a < c < b \\
(\diamond) & \exists_{c \in \mathbb{Z}} a < c < b \wedge b < c < a \\
(\heartsuit) & \exists_{c \in \mathbb{Z}} a < c < b \vee b < c < a \\
(\spadesuit) & \exists_{c \in (0,1)} ac + b(1-c) \in \mathbb{Z} \\
(\clubsuit\clubsuit) & \exists_{c > 0} ac + b(1-c) \in \mathbb{Z} \\
(\diamond\diamond) & \exists_{c \in [0,1]} bc + a(1-c) \in \mathbb{Z} \\
(\heartsuit\heartsuit) & \exists_{c \in (0,1)} a + (b-a)c \in \mathbb{Z} \\
(\spadesuit\spadesuit) & \exists_{c \in (0,1)} a + (a-b)c \in \mathbb{Z} \\
(\clubsuit\clubsuit\clubsuit) & \exists_{c \in \mathbb{Z}} \frac{c}{b-a} \in (0,1) \\
(\diamond\diamond\diamond) & \exists_{c \in \mathbb{Z}} \frac{c-b}{b-a} \in (0,1) \\
(\heartsuit\heartsuit\heartsuit) & \exists_{c \in \mathbb{Z}} \frac{c-a}{b-a} \in (0,1) \\
(\spadesuit\spadesuit\spadesuit) & \exists_{c \in \mathbb{Z} \setminus \{a\}} \frac{b-a}{c-a} > 1
\end{array}$$

498. Przyporządkować następującym twierdzeniom podane niżej warunki oraz powiedzieć, co mówi warunek nieprzyporządkowany żadnemu twierdzeniu.

(i) **Własność Darboux funkcji ciągłych:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

(ii) **Własność Darboux pochodnej funkcji:** Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[a, b]$, przy czym w punktach a i b istnieją odpowiednie pochodne jednostronne, to

(iii) **Twierdzenie Rolle'a:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna na przedziale (a, b) , a ponadto $f(a) = f(b)$, to

(iv) **Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej rachunku różniczkowego):** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna na przedziale (a, b) , to

$$(4\clubsuit) \quad \forall_{s \in (0,1)} \exists_{t \in (0,1)} f'(a + t(b-a)) = f'(a) + s(f'(b) - f'(a))$$

$$(5\diamond) \quad \exists_{t \in (0,1)} f(b) = f(a) + (b-a)f'(a + t(b-a))$$

$$(6\heartsuit) \quad \forall_{s \in (0,1)} \exists_{t \in (0,1)} f(a + t(b-a)) = f(a) + s(f(b) - f(a))$$

$$(7\diamond) \quad \forall_{t \in (0,1)} \exists_{s \in (0,1)} f(a + t(b-a)) = f(a) + s(f(b) - f(a))$$

$$(7\spadesuit) \quad \exists_{t \in (0,1)} f'(a + t(b-a)) = 0$$

W następującym zadaniu wykorzystać twierdzenie Lagrange'a oraz własność Darboux funkcji ciągłych (przypomnienie: funkcja różniczkowalna jest ciągła).

499. Funkcje $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{12}$ są określone i różniczkowalne na całej prostej rzeczywistej, a ich pochodne są ciągłe. Ponadto

$$\begin{aligned} f_1(3) &= 1, & f_1(5) &= 2, \\ f_2(0) &= 3, & f_2(4) &= -1, \\ f_3(-5) &= 0, & f_3(15) &= 10, \\ f_4(1) &= 2, & \forall_x f_4'(x) &\neq 1, \\ f_5(0) &= 0, & f_5(2) &= 10, & \forall_x f_5'(x) &\neq 2, \\ f_6(0) &= 7, & \forall_x f_6'(x) &> 2, \\ f_7(3) &= 5, & \forall_x f_7'(x) &\geq -1, \\ f_8(-2) &= 0, & f_8(0) &= 10, & f_8(3) &= 4, \\ f_9(-1) &= 0, & f_9(1) &= 100, & f_9'(3) &= 40, \\ f_{10}(1) &= -5, & f_{10}(11) &= 5, & \forall_x 0 &< f_{10}'(x) < 2, \\ f_{11}(0) &= 0, & f_{11}(100) &= 0, & \forall_x -1 &< f_{11}'(x) < 2, \\ f_{12}(-100) &= -100, & f_{12}(100) &= 100, & \forall_x -100 &< f_{12}'(x) < 100. \end{aligned}$$

A) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\forall_x f_i'(x) \neq 0$$

B) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f_i'(c) = -1$$

C) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(0) \neq 1$$

D) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(99) > 0$$

E) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f_i'(c) = 5$$

F) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f_i'(c) = 44$$

G) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f_i'(c) = \frac{1}{2}$$

H) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(1) \neq 8$$

I) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_c f_i(c) = 13$$

J) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_{c \neq d} f_i(c) = f_i(d) = 7$$

K) Dowieść, że dla co najmniej dziewięciu funkcji f_i zachodzi warunek

$$\exists_{c, d} f_i(c) = f'_i(d)$$

500. Wyprowadzić wzór na pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{7 + \sin^4 x - \sin^2 x}{7 + \cos^4 x - \cos^2 x}.$$

Doprowadzić wzór na pochodną do możliwie najprostszej postaci.

501. Podać (z wyprowadzeniem i uzasadnieniem poprawności) przykład takiego wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, że funkcja $f(x) = W(\{x\})$ jest różniczkowalna.

502. Na potrzeby tego zadania funkcję f nazwiemy **pikoróżniczkowalną** w punkcie x_0 , jeżeli istnieje granica

$$f^\spadesuit(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^2},$$

którą to granicę nazywać będziemy **pikopochodną** funkcji f w punkcie x_0 .

Obliczyć pikopochodną funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

we wszystkich punktach jej pikoróżniczkowalności.

503. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + 2xe^x - e^{2x}}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

2. Pochodna funkcji - zastosowania. Znajdowanie najmniejszej i największej wartości funkcji na przedziale domkniętym. Reguła de l'Hospitala.

504. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie trójkątnej i objętości 1. Który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej?

505. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta u góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania potrzeba było jak najmniej materiału?

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

506. $x^2 + 2x + 21$, $[-2, 7]$ 507. $|x^2 - 1| + 3x$, $[-2, 2]$

508. $|x + 1| + x^2$, $[-10, 10]$ 509. $|10x - 1| + x^3$, $[0, 1]$
 510. $\ln x - \frac{x}{10}$, $[1, e^3]$ 511. $|\sin x| + \frac{x}{2}$, $[0, 2\pi]$
 512. x^1 , $[2, 4]$ 513. $3 \sin x + \sin 3x$, $[0, 2\pi]$

Obliczyć granice

514. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ 515. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$ 516. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
 517. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - x^2 - 2}{x \sin x - x^2}$ 518. $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$ 519. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$
 520. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ 521. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}$ 522. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
 523. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ 524. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2}$ 525. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(\ln x)}{x - e}$
 526. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$ 527. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}$

528. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

529. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x} & \text{dla } x \notin \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\ A_k & \text{dla } x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Dla których A_k ($k \in \mathbb{Z}$) istnieją $f'(k\pi)$ i ile wynoszą?

530. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} & \text{dla } x \notin \{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\} \\ A_k & \text{dla } x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Dla których A_k ($k \in \mathbb{Z}$) istnieją $f'(k\pi + \frac{\pi}{2})$ i ile wynoszą?

531. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & \text{dla } x \notin \mathbb{Z} \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbb{Z}$, dla których istnieje.

532. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{7x} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.

Obliczyć $f'(0)$.

533. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sin(\pi x)} & \text{dla } x \notin \mathbb{Z} \\ x^3 - x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbb{Z}$, dla których istnieje.

534. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

535. Niech \mathbb{T} będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunki

$$f(3) = 7$$

$$2 \leq f'(x) \leq 3 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

W każdym z zadań **A-F** podaj odpowiedni kres zbioru.

Za podanie poprawnych odpowiedzi w n zadaniach otrzymasz $\max(0, n-1)$ punktów.

A. $\sup\{f(6) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

B. $\inf\{f(5) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

C. $\sup\{f(2) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

D. $\inf\{f(1) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

E. $\sup\{f(9) - f(4) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

F. $\inf\{f(7) - f(0) : f \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

536. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x^2 + x - \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}$$

na przedziale $\left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiąmane.

537. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x - 4\sqrt{x} + \ln x$$

na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiąmane.

538. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = -3x + (x^2 - 6x + 9)^{3/2}$$

na przedziale $[1, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiąmane.

3. Pochodne wyższego rzędu.

Wzór Taylora.

Wypukłość funkcji.

Obliczyć pochodną rzędu 3 funkcji zmiennej x danej wzorem

539. $(x+1)^6$ **540.** $x^6 - 4x^3 + 4$ **541.** $\frac{1}{1-x}$ **542.** $x^3 \ln x$ **543.** e^{2x-1}

544. $\cos x$ **545.** $(x^2+1)^3$ **546.** e^{x^2} **547.** $\ln(x^2)$ **548.** $(x-7)^{50}$

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu n funkcji zmiennej x danej wzorem

549. $\ln(x^{10})$ **550.** $x \ln x$ **551.** \sqrt{x} **552.** $x^2 \sin x$ **553.** $\frac{1-x}{1+x}$ **554.** $x e^x$

555. $\sin 5x$ **556.** x^7 **557.** e^{4x} **558.** $x + \frac{1}{x}$ **559.** $x^2 e^{-x}$ **560.** $\sin^2 x$

561. Dowieść, że $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

Obliczyć przybliżone wartości następujących liczb korzystając z trzech wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacować błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

562. $\sqrt[3]{24}$ **563.** $\sqrt[4]{e}$ **564.** $\sqrt[3]{126}$ **565.** $\sqrt[7]{126}$

566. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina funkcji

$$f(x) = \sqrt{x+2}.$$

567. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x+3}.$$

568. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina funkcji

$$f(x) = \ln(x+e).$$

569. Zbadać, w jakim przedziale jest zbieżny szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

i podać wzór na jego sumę w tym przedziale.

Znaleźć punkty przegięcia i przedziały wypukłości funkcji danych wzorami:

570. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ 571. $x^8 - x^2 + 7x - 15$ 572. e^{-x^2}

573. $\sin^4 x$ 574. $\sqrt{x} - \ln x$ 575. $x^4 + \sqrt[4]{x}$

576. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2010 funkcji

$$f(x) = e^x \sin(x\sqrt{3}).$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków " \sum ", "+", "-".

577. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

578. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz spełnia warunki

$$f(1) = f(2) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{dla każdego } x \in (0, +\infty).$$

Wyznaczyć $f(4)$.

579. Niech \mathbb{T} będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunki

$$f(0) = f'(0) = 1$$

$$1 \leq f''(x) \leq 2 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Dobrać odpowiednie liczby C , D , a następnie:

a) Dowieść, że dla dowolnej funkcji $f \in \mathbb{T}$ zachodzi nierówność

$$C \leq f(1) \leq D.$$

b) Wskazać takie funkcje $f_1, f_2 \in \mathbb{T}$, że

$$f_1(1) = C, \quad f_2(1) = D.$$

4. Całka nieoznaczona - podstawy. Całkowanie przez części i przez podstawienie.

Obliczyć $\int f(x)dx$ jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

$$\begin{array}{llll}
 \mathbf{580.} & 10^x & \mathbf{581.} & \sqrt[m]{x^n} \quad (m, n \in \mathbb{N}) \\
 \mathbf{582.} & a^x e^x, \quad a > 0 & \mathbf{583.} & 3, 4x^{-0,17} \\
 \mathbf{584.} & 1 - 2x & \mathbf{585.} & \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \\
 \mathbf{586.} & (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) & \mathbf{587.} & \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} \\
 \mathbf{588.} & (x+1)^{22} & \mathbf{589.} & \frac{x^{100} - 1}{x - 1} \\
 \mathbf{590.} & \sin^2 x & \mathbf{591.} & \frac{x^3}{x+1} \\
 \mathbf{592.} & \frac{x\sqrt[6]{x} + \sqrt[7]{x}}{x^2}
 \end{array}$$

Znaleźć taką funkcję F , że $F''(x)$ dane jest wzorem

$$\mathbf{593.} \quad x^2 + 2x \quad \mathbf{594.} \quad \cos x \quad \mathbf{595.} \quad e^{7x}$$

Znaleźć taką funkcję F , że

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{596.} \quad F''(x) = x^2 + 1, \quad F'(0) = 2, \quad F(0) = 3 \\
 \mathbf{597.} \quad F''(x) = \frac{1}{x^3}, \quad F'(2) = 1, \quad F(3) = 5 \\
 \mathbf{598.} \quad F'''(x) = \sin x, \quad F''(0) = F'(0) = F(0) = 0 \\
 \mathbf{599.} \quad F''(x) = \frac{1}{x^2}, \quad F'(1) = F'(-1) = 1, \quad F(1) = F(-1) = 3
 \end{array}$$

Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

$$\begin{array}{llllll}
 \mathbf{600.} & x \sin 2x & \mathbf{601.} & x e^{-x} & \mathbf{602.} & x^{3^x} \\
 \mathbf{603.} & x^n \ln x & \mathbf{604.} & x^3 e^{5x} & \mathbf{605.} & e^x \sin^2 x \\
 \mathbf{606.} & x \sin x \cos x & \mathbf{607.} & e^{3x} \sin 2x & \mathbf{608.} & \sqrt{e^x - 1} \\
 \mathbf{609.} & e^x \sin e^x & \mathbf{610.} & x e^{x^2} & \mathbf{611.} & 1 \cdot \sin \ln x \\
 \mathbf{612.} & e^{-x^2} x & \mathbf{613.} & \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \mathbf{614.} & e^{\sqrt[3]{x}} \\
 \mathbf{615.} & \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} & \mathbf{616.} & \cos x \cdot e^{\sin x} & \mathbf{617.} & 6^{1-x} \\
 \mathbf{618.} & \sin^5 x \cos x & \mathbf{619.} & \operatorname{tg} x & \mathbf{620.} & x e^{x^2} (x^2 + 1) \\
 \mathbf{621.} & e^{5x} \sin 3x & \mathbf{622.} & e^{5x} \cos 3x & \mathbf{623.} & \sin 3x \cdot \sin 5x \\
 \mathbf{624.} & \sin 15x \cdot e^{-4x} & \mathbf{625.} & \frac{\arctg x}{x^2 + 1} & \mathbf{626.} & \frac{\arctg^7 x + 9 \arctg^5 x}{x^2 + 1} \\
 \mathbf{627.} & \frac{x^3}{(x-1)^{12}} & \mathbf{628.} & \frac{\ln^7 x + \ln^2 x}{x} & \mathbf{629.} & e^{-x^2} x^5 \\
 \mathbf{630.} & \sin \sqrt{x} & \mathbf{631.} & \frac{\sqrt{2 + \ln x}}{x} & \mathbf{632.} & \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x + 1}} \\
 \mathbf{633.} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{Wsk.} & x = \sin t
 \end{array}$$

Znaleźć wszystkie takie funkcje F , że $F''(x)$ dane jest wzorem

$$\mathbf{634.} \quad x e^x \quad \mathbf{635.} \quad \frac{1}{x}$$

5. Całka nieoznaczona (c.d.). Całkowanie funkcji wymiernych.

Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

$$\begin{array}{llll}
 \mathbf{636.} & \frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2} & \mathbf{637.} & \arctg x \\
 \mathbf{638.} & \arctg \sqrt{x} & \mathbf{639.} & \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \\
 \mathbf{640.} & x^2 \ln(x+1) & \mathbf{641.} & \frac{x}{(x+1)(2x+1)} \\
 \mathbf{642.} & \frac{x}{x^2 - 7x + 10} & \mathbf{643.} & \frac{x-2}{x^2 - 7x + 12} \\
 \mathbf{644.} & \frac{x}{2x^2 - 3x - 2} & \mathbf{645.} & \frac{4x+3}{(x-2)^3} \\
 \mathbf{646.} & \frac{x^3+1}{x^3-x^2} & \mathbf{647.} & \frac{x^4}{x^2+1}
 \end{array}$$

648. $\frac{1}{(x^2+9)^3}$ **649.** $\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}$ **650.** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ **651.** $\frac{1}{x\sqrt{x+1}}$
652. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ **653.** $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ **Wsk.** $t=e^x$ **654.** $1 \cdot \ln(1+x^2)$ **655.** $\frac{x^2}{1+x^3}$
656. $x \ln(x^2+1)$ **657.** $\frac{1}{x^2-x-1}$ **658.** $\frac{7x^6+3x^2+4x}{x^7+x^3+2x^2+4}$
659. $\sqrt{x} \ln x$ **660.** $\frac{e^x}{e^{2x}+1}$ **661.** $\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ **662.** $\frac{e^x}{e^{3x}-1}$
663. $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ **664.** $\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$ **665.** $\frac{1}{x^6+x^4}$
666. $\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2-4)}$ **667.** $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x+2}}}$ **668.** $\frac{x^4}{x^{15}-1}$
669. $\frac{1}{x^4+1}$ **Wsk.** $x^4+1=(x^2+ax\pm 1)(x^2+bx\pm 1)$
670. $x^2 \arctg x$ **671.** $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$

Sprowadzić następujące całki do całek funkcji wymiernych

672. $\int \sin^{10} x dx$ **673.** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ **674.** $\int \frac{x^{20}}{x^{30} + \sqrt{x+1}} dx$
675. $\int \frac{\sqrt[5]{x+32}+11}{\sqrt[7]{x+32}+x} dx$ **676.** $\int \sqrt[7]{21+\sqrt[3]{x+5}} dx$ **677.** $\int \frac{\sqrt{x+7}+x}{x^2\sqrt{x+7}+4} dx$
678. $\int \sqrt{x^2-1} dx$ **Wsk.** $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$
679. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+9}}$ **680.** $\int \sqrt{x^2-16} x^7 dx$
681. $\int \sqrt{x^2+1} dx$ **Wsk.** $\sqrt{x^2+1} = x+t$

Wyrazić I_n przy pomocy I_{n-1} lub I_{n-2}

682. $I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+4)^n} dx$ **683.** $I_n(x) = \int x^n e^x dx$ **684.** $I_n(x) = \int x^n \sin x dx$
685. $I_n(x) = \int \sin^n x dx$ **Wsk.** $\sin x \cdot \sin^{n-1} x$ przez części
686. $I_n(x) = \int \ln^n x dx$ **687.** $I_n(x) = \int x^n e^{x^2} dx$

688. Znaleźć takie F , że $F''(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, $F'(0) = 0$, $F(0) = 5$

Dla spragnionych większej ilości zadań:

W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, część I,

Rozdział XV Całki nieoznaczone,

Rozdział XVI Całki funkcji wymiernych,

§17.1 Całki z pierwiastków z wyrażenia liniowego.

6. Całka oznaczona.

689. Przemek ma przygotować referat dotyczący całki oznaczonej. Przemek chce podać następujące wzory zachodzące dla funkcji ciągłej f na przedziale $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]} f(x) \quad (A)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]} f(x) \quad (B)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad (C)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad (D)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + (k-1/2) \frac{b-a}{n}\right) \quad (E)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right) \quad (F)$$

Przemek poprosił Gosię o wykonanie rysunków ilustrujących powyższe wzory. Niestety Gosia nie napisała, który rysunek odpowiada któremu wzorowi.

Pomóż Przemkowi przyporządkować rysunki (rys. 1-6, str. 50-52) odpowiednim wzorom.

Podać wzór na $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ oraz obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

690. $f(x) = 1$, $a = 5$, $b = 8$ **691.** $f(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$

692. $f(x) = x$, $a = 1$, $b = 5$ **693.** $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 5$

694. $f(x) = x^3$, $a = 0$, $b = 1$ **695.** $f(x) = 2x + 5$, $a = -3$, $b = 4$

696. $f(x) = x^2 + 1$, $a = -1$, $b = 2$ **697.** $f(x) = x^3 + x$, $a = 0$, $b = 4$

698. $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$

Obliczyć następujące całki poprzez konstrukcję ciągu podziałów dziedziny oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna

699. $\int_2^4 x^{10} dx$ (Wsk. $2 \cdot 2^{k/n}$) **700.** $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ (Wsk. $e^{k/n}$)

701. $\int_0^{20} x dx$ **702.** $\int_1^{10} e^{2x} dx$ **703.** $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$ (Wsk. $\frac{k^3}{n^3}$)

704. $\int_{-1}^1 |x| dx$ **705.** $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ (Wsk. $2^{k/n}$) **706.** $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ (Wsk. $\frac{4k^2}{n^2}$)

Obliczyć całki oznaczone:

$$\begin{array}{lll}
707. \int_{-\pi}^{\pi} \sin x^{2007} dx & 708. \int_0^2 \operatorname{arctg}[x] dx & 709. \int_0^2 [\cos x^2] dx \\
710. \int_0^1 \sqrt{1+xd} dx & 711. \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3} dx & 712. \int_{-13}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} dx \\
713. \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx & 714. \int_0^3 \operatorname{sgn}(x^3-x) dx & 715. \int_0^1 x e^{-x} dx \\
716. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx & 717. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx & 718. \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx \\
719. \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx & 720. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} & 721. \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3} \\
722. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} & 723. \int_0^5 |x^2-5x+6| dx & 724. \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} dx \\
725. \int_1^2 x \log_2 x dx & 726. \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx & 727. \int_0^{6\pi} |\sin x| dx \\
728. \int_0^{\pi/2} \cos x \sin^{11} x dx & 729. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx \\
730. \int_{-\pi}^{\pi} x^{2007} \cos x dx & 731. \int_0^{2\pi} (x-\pi)^{2007} \cos x dx
\end{array}$$

Udowodnić następujące oszacowania

$$\begin{array}{ll}
732. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < 2 & 733. \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx < \frac{1}{2} \\
734. \frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8} & 735. \int_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2} dx < \frac{3}{2} \\
736. \int_0^1 x(1-x^{99+x}) dx < \frac{1}{2} & 737. 2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} dx \\
738. 5 < \int_1^3 x^x dx < 31 & 739. \int_1^2 \frac{1}{x} dx < \frac{3}{4}
\end{array}$$

Obliczyć granice

740. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$ 741. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{21}}$
 742. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \cdot n$
 743. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{3n}}$
 744. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \sin \frac{3}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n} \right) \cdot \frac{1}{n}$
 745. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n} + \sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+2} + \dots + \sqrt{5n} \right) \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$
 746. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$
 747. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n} \cdot (\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \dots + \sqrt[3]{2n})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}$
 748. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \frac{n}{n^2+16} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$
 749. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5n} + \frac{4}{5n+3} + \frac{4}{5n+6} + \frac{4}{5n+9} + \dots + \frac{4}{26n}$
 750. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n} + \frac{1}{7n+2} + \frac{1}{7n+4} + \frac{1}{7n+6} + \dots + \frac{1}{9n}$
 751. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n^2} + \frac{1}{7n^2+1} + \frac{1}{7n^2+2} + \frac{1}{7n^2+3} + \dots + \frac{1}{8n^2}$
 752. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\sqrt{\frac{1}{n}}} + e^{\sqrt{\frac{2}{n}}} + e^{\sqrt{\frac{3}{n}}} + \dots + e^{\sqrt{\frac{n}{n}}} \right)$
 753. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+6}} + \frac{1}{\sqrt{n+9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{7n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$
 754. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+0}{(3n)^3} + \frac{n^2+1}{(3n+1)^3} + \frac{n^2+2}{(3n+2)^3} + \frac{n^2+3}{(3n+3)^3} + \dots + \frac{n^2+n}{(4n)^3}$
 755. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+2)^2} + \frac{n}{2(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$
 756. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{n^2+(n+2)^2} + \frac{n}{n^2+(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$

757. Udowodnić oszacowanie $\frac{19}{3} < \int_2^3 x^x dx < \frac{65}{4}$. **Wskazówka:** Oszacować x^x przez x^a .

Obliczyć granice

758. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n}\sqrt{3n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{3n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}\sqrt{3n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}\sqrt{3n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3n}\sqrt{4n}}$

Wskazówka: Niewymierność $\sqrt{(x+a)(x+b)}$ całkujemy wykonując podstawienie $t = \sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$.

759. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sin(n^2+0^2)}{n^2+0^2} + \frac{n+\sin(n^2+1^2)}{n^2+1^2} + \frac{n+\sin(n^2+2^2)}{n^2+2^2} + \frac{n+\sin(n^2+3^2)}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n+\sin(n^2+n^2)}{n^2+n^2}$

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

Obliczyć pole figury ograniczonej następującymi krzywymi

760. $y = x^2$ i $y = 2x + 5$

761. $y = e^x$ i prostą przechodzącą przez punkty $(0, 1)$ i $(1, e)$

762. $y = \sin x$ i $y = \frac{2x}{\pi}$ 763. $y = x^4$ i $y = x^3$

764. $y = \frac{1}{x}$ i $y = \frac{5}{2} - x$ 765. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$ i $x = 2$

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć długość łuku krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

766. $x, 1, 2$ 767. $2x - 3, -7, 12$

768. $x^2, 0, 1$ **Wsk.** Skorzystać z tablic całek.

769. $e^x, 1, 2$ 770. $\sqrt{x^3}, 6, 10$ 771. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}, 0, 1$

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX

772. $x^3, 0, 5$ 773. $e^{-x}, 0, 10$

774. $\sqrt{x}, 0, 4$ 775. $\sin x, 0, \pi$ 776. $\cos 7x, 0, 2\pi$

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX

777. \sqrt{x} , 0 , 1 **778.** x , 1 , 5 **779.** x^7 , 0 , 10

780. e^x , -3 , 0 **781.** $\sin x$, 0 , $\frac{3\pi}{2}$

Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru ograniczonego krzywymi o podanych równaniach, wokół osi OY

782. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 5$ **783.** $y = \sin x$ i $y = -\sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

784. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 2$ **785.** $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = e$

786. $y^2 = 1 - (x - 2)^2$

787. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \sqrt{x+4}^3$, $0 \leq x \leq 5$.

788. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq xe^x$, $0 \leq x \leq 1$ wokół osi OX.

789. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \ln x$, $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.

790. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $\arctg x \leq y \leq \sqrt{\arctg^2 x + \sqrt{1 + \sin x}}$, $0 \leq x \leq \pi$ wokół osi OX.

791. Pomarańczę o cenniejszej skórce pokrojono na plastry równej grubości. Dowieść, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

792. Od pomarańczy o grubej skórce odkrojono końce tak, aby ukazał się miąższ. Pozostałą część pokrojono na plastry równej grubości. Dowieść, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

793. Pasem o szerokości d nazywamy obszar płaszczyzny zawarty pomiędzy dwiema prostymi równoległymi odległymi o d , wraz z tymi prostymi.

Czy koło można pokryć pasami o sumie szerokości mniejszej od średnicy koła?

Pasów ma być skończenie wiele.

7. Całki niewłaściwe - obliczanie, kryterium porównawcze.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć te, które są zbieżne

$$794. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \quad 795. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad 796. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad 797. \int_{-1}^1 \frac{x-1}{x^2-1} dx$$

$$798. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \quad 799. \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}} \quad 800. \int_0^{\infty} \cos x dx \quad 801. \int_1^{\infty} x^{1/x} dx$$

$$802. \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx \quad 803. \int_0^1 e^{1/x} dx \quad 804. \int_1^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^3} dx$$

$$805. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} \quad 806. \int_0^{\infty} x^3 \sin x^4 dx$$

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

$$807. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sin^2 x} \quad 808. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \arctg x} \quad 809. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x - \sin \sqrt{x} + 28}$$

$$810. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2} \quad 811. \int_0^{\infty} \frac{1 + \sqrt{x + |\ln x|}}{x} dx \quad 812. \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$813. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}} \quad 814. \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2 + \arctg x} dx \quad 815. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + \sin^2 x}$$

$$816. \int_1^{\infty} e^{-1/x} dx \quad 817. \int_0^{\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} dx \quad 818. \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

OSZUSTWO 819. (funkcja ciągła nieujemna mająca całkę mniejszą od zera):

Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Bez trudu można sprawdzić, że f jest ciągła w zerze, a zatem obliczenie całki $\int_{-1}^1 f(x) dx$ nie powinno nastęczać trudności. Ponieważ

$$f(x) = \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})}$$

poza pojedynczym punktem $x = 0$, po wykonaniu podstawienia $t = e^{1/x}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} = - \int_{1/e}^e \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= -\arctg t \Big|_{1/e}^e = -\arctg e + \arctg \frac{1}{e} = \frac{\pi}{2} - 2\arctg e < 0 \end{aligned}$$

Wyjaśnić, na czym polega oszustwo i obliczyć prawdziwą wartość całki $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartość tych, które są zbieżne

$$820. \int_{-2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2(e^{2/x} + e^{-2/x} + 2)} dx \quad 821. \int_{-1}^1 \ln|x| dx$$

Użyć kryterium całkowego do rozstrzygnięcia zbieżności następujących szeregów

$$822. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} \quad 823. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n} \text{ w zależności od } a > 0$$

$$824. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \quad 825. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad 826. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

827. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n) = \frac{1}{n}$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna.

828. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n) = \frac{1}{n^2}$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest rozbieżna.

829. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n) = n$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna.

830. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n) = 0$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest rozbieżna.

831. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n) = e^n$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna.

Co możemy powiedzieć o zbieżności (*zbieżne, rozbieżne, nie wiadomo*) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lub

całek $\int_0^1 f(x) dx$ i $\int_1^{\infty} g(x) dx$, gdzie $f \in C(0, 1]$ i $g \in C[1, \infty)$, jeśli wiadomo, że

$$832. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad 833. \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \quad 834. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$835. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad 836. \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1 \quad 837. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$838. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad 839. \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty \quad 840. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

841. Ciąg (a_n) nie jest zbieżny do 0.

842. $g(x)$ nie dąży do 0 przy $x \rightarrow \infty$.

843. $f(x)$ nie dąży do 0 przy $x \rightarrow 0$.

844. Ciąg (a_n) jest ograniczony. 845. ... nie jest ograniczony.

846. Funkcja g jest ograniczona. 847. ... nie jest ograniczona.

848. Funkcja f jest ograniczona. 849. ... nie jest ograniczona.

850. Szereg $\sum_{n=2009}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. 851. ... jest rozbieżny.

852. Całka $\int_{2009}^{\infty} g(x) dx$ jest zbieżna. 853. ... jest rozbieżna.

854. Całka $\int_0^{1/2009} f(x) dx$ jest zbieżna. 855. ... jest rozbieżna.

856. $a_n = n^p$ - dać odpowiedź w zależności od p .

857. $g(x) = x^p$ - dać odpowiedź w zależności od p .

858. $f(x) = x^p$ - dać odpowiedź w zależności od p .

859. $a_n = p^n$ - dać odpowiedź w zależności od p .

860. $g(x) = p^x$ - dać odpowiedź w zależności od $p > 0$.

861. $f(x) = p^x$ - dać odpowiedź w zależności od $p > 0$.

8. Pochodne i całki - powtórzenie, uzupełnienie.

862. Czy dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mającej ciągłą pochodną rzędu pierwszego i takiej, że $f(0) = 0$, prawdziwa jest podana implikacja (zmienna x przebiega liczby rzeczywiste spełniające nierówność podaną pod kwantyfikatorem)

a) $\left(\forall_{x>0} f(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f'(x) > 0 \right)$

b) $\left(\forall_{x>0} f'(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f(x) > 0 \right)$

c) $\left(\forall_{x<0} f(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x<0} f'(x) > 0 \right)$

d) $\left(\forall_{x<0} f(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x<0} f'(x) < 0 \right)$

e) $\left(\forall_{x<0} f'(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x<0} f(x) > 0 \right)$

f) $\left(\forall_{x<0} f'(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x<0} f(x) < 0 \right)$

g) $\left(\forall_{x>0} f(x) \neq 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f'(x) \neq 0 \right)$

h) $\left(\forall_{x>0} f'(x) \neq 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f(x) \neq 0 \right)$

i) $\left(\forall_{x>0} f(x) = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f'(x) = 0 \right)$

j) $\left(\forall_{x>0} f'(x) = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall_{x>0} f(x) = 0 \right)$

k) $\left(\exists_{x>0} f(x) = 0 \right) \Rightarrow \left(\exists_{x>0} f'(x) = 0 \right)$

l) $\left(\exists_{x>0} f'(x) = 0 \right) \Rightarrow \left(\exists_{x>0} f(x) = 0 \right)$

m) $\left(\exists_{x>0} f(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\exists_{x>0} f'(x) > 0 \right)$

n) $\left(\exists_{x>0} f'(x) > 0 \right) \Rightarrow \left(\exists_{x>0} f(x) > 0 \right)$

863. Czy funkcja $f(x) = a \cdot |x| + b \cdot \sin |x| + c \cdot \cos |x|$ jest różniczkowalna w zerze, jeżeli

a) $a = 1, b = 1, c = 1$

b) $a = -1, b = 1, c = 1$

c) $a = 1, b = -1, c = 1$

d) $a = 1, b = 1, c = -1$

864. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\int_2^4 2^x dx > 10$

b) $\int_{-10}^0 2^x dx > 10$

c) $\int_0^2 2^x dx > 10$

$$\text{d) } \int_4^5 2^x dx > 10$$

865. Czy podana całka ma wartość dodatnią?

$$\text{a) } \int_{-1}^1 x^2 \cdot \sqrt{x^8 + 1} dx$$

$$\text{b) } \int_{-2}^1 x^3 \cdot \sqrt{x^8 + 1} dx$$

$$\text{c) } \int_{-1}^2 x^5 \cdot \sqrt{x^8 + 1} dx$$

$$\text{d) } \int_{-2}^2 x^7 \cdot \sqrt{x^8 + 1} dx$$

866. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\pi/3} \cos^5 x dx .$$

867. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{3x} + e^x} dx .$$

868. Znaleźć największą liczbę całkowitą dodatnią n , dla której istnieje taka liczba rzeczywista A , że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - 1 + \ln(x+1)}{x^n} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości n i A .

869. Wyznaczyć kresy zbioru

$$A = \left\{ \int_0^a x^2 - a dx : a \in (0, 3) \right\}$$

i określić, czy należą one do zbioru A .

870. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0) = 0$, $f(7) = 12$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$1 < f'(x) < 2 .$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(4) - \dots\dots\dots| < 1 .$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

871. Rozstrzygnąć zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p + 1}{\sqrt{x^5 + x}} dx$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego p .

872. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0) = 0$, $f(5) = 9$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$f'(x) \neq 3.$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(3) - \dots\dots\dots| < 3.$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

873. Czy podana całka niewłaściwa jest zbieżna

a) $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2} dx$

b) $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^3+2} dx$

c) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+\sqrt{x}} dx$

d) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+\sqrt{x}} dx$

e) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^3+\sqrt{x}} dx$

f) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+\sqrt{x}} dx$

g) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+x} dx$

874. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\int_2^4 \frac{dx}{\log_2 x} < 1$

b) $\int_2^4 \frac{dx}{\log_2 x} < 2$

c) $\int_4^8 \frac{dx}{\log_2 x} < 2$

d) $\int_4^8 \frac{dx}{\log_2 x} < 3$

$$\text{e) } \int_{20}^{30} \frac{dx}{\log_2 x} < 3$$

$$\text{f) } \int_{20}^{30} \frac{dx}{\log_2 x} < 4$$

$$\text{g) } \int_{33}^{63} \frac{dx}{\log_2 x} < 4$$

$$\text{h) } \int_{33}^{63} \frac{dx}{\log_2 x} < 5$$

875. Obliczyć wartość całki

$$\int_2^6 \frac{2x-7}{4x^2+17x+4} dx.$$

876. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2 + (n+1)^2} + \frac{n}{3n^2 + (n+2)^2} + \frac{n}{3n^2 + (n+3)^2} + \frac{n}{3n^2 + (n+4)^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right).$$

877. Obliczyć całkę

$$\int x^p \cdot e^{x^\pi} dx$$

dla odpowiednio dobranej wartości parametru rzeczywistego $p \in [3, 8]$.

878. Znaleźć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{5x} - e^{3x} - 2x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości A .

879. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x - 2\arctg x$$

na przedziale $[0, 4]$. Podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiąmane.

880. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \arctg \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - \arctg x$$

na przedziale $[0, 37]$ oraz podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiąmane.

881. Znaleźć taką funkcję różniczkowalną $F: \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$F'(x) = \frac{1}{x(x+2)}$$

oraz

$$F(-3) = F(-1) = F(1) = 0$$

lub uzasadnić, że taka funkcja nie istnieje.

882. Obliczyć całkę

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}.$$

883. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n + 1}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n + 1}. \quad (1)$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział
 Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{1 - x^3} dx = (c - b) \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + 2x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{(b + c) \ln|1 - x|}{3} + \frac{(b + c) \ln(x^2 + x + 1)}{6} - \frac{a \ln|1 - x^3|}{3} + C$$

dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$ otrzymujemy

$$f(x) = \int f'(x)dx = \dots\dots\dots \quad (2)$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x = \dots\dots\dots$

Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(\dots\dots) = \dots\dots,$$

natomiast wzór (2) daje

$$\begin{aligned} f(\dots\dots) &= \dots\dots\dots + C = \\ &= \dots\dots\dots + C. \end{aligned}$$

Stąd

$$C = \dots\dots\dots$$

i ostatecznie

$$f(x) = \dots\dots\dots \quad (3)$$

Przyjmując $x = \dots\dots$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy $\dots\dots\dots$. Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(\dots\dots) = \dots\dots\dots =$$

$$= \dots\dots\dots =$$

$$= \dots\dots\dots$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

$$\dots\dots\dots$$

884. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{+\infty} \frac{4dx}{x^2 + 8x}$$

lub uzasadnić, że jest rozbieżna.

885. Funkcja $g : (-8, +\infty)$ zdefiniowana jest wzorem

$$g(x) = \int_0^x \ln \left(\frac{(t+8)^3}{(t+16)^2} \right) dt .$$

Funkcja $f : (-8, +\infty)$ zdefiniowana jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases} .$$

Dobrać A tak, aby funkcja f była różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

886. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na całej prostej, a ponadto ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego. Wiemy też, że

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 5, \quad f(5) = 9.$$

Dowieść, że istnieje taka liczba rzeczywista x , że $f'(x)$ jest liczbą całkowitą.

887. Dana jest funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sin \left(39 \cdot (x^{37/\ln x} + 1)^{38} \right)$$

dla $x \in (1, +\infty)$. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (1, +\infty)$ zachodzi nierówność

$$f'(x) < 40.$$

888. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = e^x \cdot \cos x.$$

Wyprowadzić wzór na $f^{(2009)}$, czyli pochodną rzędu 2009.

9. Szeregi Fouriera.

Szeregiem Fouriera funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie 2π , całkowalnej na przedziale długości 2π , nazywamy szereg

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

Powyższe całki nie zależą od wyboru dolnej granicy przedziału całkowania.

Jeżeli ponadto funkcja f jest przedziałami monotoniczna oraz dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2},$$

to f jest (punktowo) sumą swojego szeregu Fouriera.

Równość Parsevala:

$$\int_A^{A+2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji

889. $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$ 890. $f(x) = |x|$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
891. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\pi, \pi)$ 892. $f(x) = x^2$ dla $x \in (0, 2\pi)$
893. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 894. $f(x) = [\frac{x}{\pi}]$ dla $x \in (0, 2\pi)$
895. $f(x) = e^x$ dla $x \in (0, 2\pi)$ 896. $f(x) = e^x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$
897. $f(x) = |\sin x|$ dla $x \in (0, 2\pi)$ 898. $f(x) = e^{|x|}$ dla $x \in (-\pi, \pi)$
899. $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$ dla $x \in (0, 2\pi)$
900. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ \cos x & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$
901. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$
902. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } 0 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{dla } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$

903. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

stosując wzór Parsewala do $f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$ oraz wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwie wyniki.

904. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2}$$

wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera funkcji $f(x) = \cos(x\sqrt{2})$ na $(0, 2\pi)$.

905. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

używając $f(x) = x(\pi - |x|)$ na $(-\pi, \pi)$.

906. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $2\pi/3$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 3.

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciąg funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do f , jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , a ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g , to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$$

907. Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

908. Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3 + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

W zadaniach **909-911** zakładamy, że funkcja f jest na tyle regularna, że nie ma problemu z obliczeniem współczynników jej szeregu Fouriera, a przy tym f jest sumą swojego szeregu Fouriera.

909. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{\pi}{2}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 4.

910. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{2\pi}{5}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n = b_n = 0$ dla n niepodzielnych przez 5.

911. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ okresowa o okresie 2π . Dowieść, że f spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

<<< podać warunek w języku współczynników szeregu Fouriera funkcji f >>>

912. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 5x \cdot \cos 7x .$$

913. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^8 x .$$

914. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{8\pi/7}^{22\pi/7} \cos^{10} x .$$

915. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ pochodna szóstego rzędu dana jest wzorem

$$f^{(6)}(x) = \sin^6 x .$$

916. Wyprowadzić wzór na sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n} .$$

Najważniejsze wzorki (i przykłady) z wykładu dotyczące zespolonej funkcji wykładniczej i logarytmu:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot z^n}{n}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq -1$$

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad z \neq 0$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z = x + iy, \quad x > 0$$

917. Wyprowadzić wzory na sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

Podać wartość całek

$$(918) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \, dx$$

$$(919) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \, dx$$

$$(920) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \cdot \cos 7x \, dx$$

$$(921) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \cdot \sin 7x \, dx$$

$$(922) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \cos \sin x \cdot \sin^4 x \, dx$$

$$(923) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \cdot \sin^5 x \, dx$$

$$(924) \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x \, dx$$

925. Wyprowadzić wzór na sumę

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

926. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

przyglądając się na wszystkie strony $\ln(1+i)$.

927. Wyprowadzić wzory na

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2nx}{(2n)!} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{(2n)!}$$

korzystając z rozwinięcia

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

oraz ze wzoru

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Odpowiedź:

$$\frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x$$

$$\frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x$$

Podać wartość całek

$$(928) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \, dx$$

$$(929) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \cdot \cos x \, dx$$

$$(930) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \cdot \sin 17x \, dx$$

$$(931) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \cdot \cos 2x \, dx$$

$$(932) \quad \int_{\pi}^{5\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \cdot \cos 5x \, dx$$

$$(933) \quad \int_{-48\pi}^{52\pi} \frac{e^{\sin x} + e^{-\sin x}}{2} \cdot \cos \cos x \cdot \cos 52x \, dx$$

$$(934) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \, dx$$

$$(935) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \cdot \cos 10x \, dx$$

$$(936) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \cdot \sin 10x \, dx$$

$$(937) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \cdot \sin 11x \, dx$$

$$(938) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \cdot \sin 12x \, dx$$

$$(939) \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \cdot \sin \cos x \cdot \cos^5 x \cdot \sin 3x \, dx$$

Dla podanej funkcji f :

a) Wyznaczyć największą liczbę naturalną n , dla której funkcja g określona wzorem $g(x) = f(x)/x^n$ ma granicę w zerze (skorzystać ze wzoru Taylora).

b) Definiujemy $g(0)$ tak, aby funkcja g była ciągła. Obliczyć $g'(0)$ oraz $g''(0)$.

940. $f(x) = \sin x - x$ **941.** $f(x) = \sin x - x \cos x$

942. $f(x) = e^{-x} - 1 - \ln(x+1)$ **943.** $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$

944. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \sin x$ **945.** $f(x) = \operatorname{arctg} x - 2 \sin x + x$

Na potrzeby kolejnych zadań funkcję f nazwiemy **treffloróżniczkovalną** w punkcie x_0 , jeżeli istnieje granica

$$f^{\clubsuit}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2},$$

którą to granicę nazywać będziemy **trefflopochodną** funkcji f w punkcie x_0 .

Z definicji zbadać treffloróżniczkovalność i obliczyć trefflopochodną funkcji

946. $f(x) = x^3$ **947.** $f(x) = e^x$ **948.** $f(x) = e^{7x}$ **949.** $f(x) = \sin x$

950. Uzasadnić treffloróżniczkovalność porządných¹ funkcji.

951. Dać przykład funkcji, która w zerze jest treffloróżniczkovalna, ale nieciągła.

¹Funkcja porządna to funkcja różniczkovalna odpowiednią do potrzeb liczbę razy.

960. Obliczyć

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^3 x \, dx .$$

961. Obliczyć

$$\int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} .$$

962. Zbadać zbieżność całki

$$\int_0^{+\infty} \frac{5x^7 - 2x^5 + 3\sqrt{x}}{5x^9 - 2x^5 + 3x} \, dx .$$

963. Obliczyć

$$\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2 + 2x + 10} \, dx .$$

964. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^1 \frac{12x - 4}{(x + 2)(4x + 1)} \, dx .$$

Sprowadzić wynik do prostej postaci i określić, czy jest on liczbą dodatnią, ujemną, czy zerem.

965. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 4x + 5}{x^3 + x^2 + x + 1} \, dx .$$

966. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-1}^2 \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} \, dx .$$

967. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^3 + 8x^2 + 25x} .$$

968. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x + 6}} .$$

969. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \cdot \sin \sqrt{x^3 + 1} dx .$$

970. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ \left(x, \frac{x^2}{8} - \ln x \right) : 1 \leq x \leq e \right\} .$$

Zastąpić ? odpowiednim znakiem nierówności i udowodnić podane nierówności przy podanych warunkach:

971. $x_i \in [0, \frac{1}{4}] \wedge \sum_{i=1}^{81} x_i = 9 \Rightarrow \sum_{i=1}^{81} (\sqrt{x_i} + x_i^2) ? 28$

972. $x_i \in [\frac{1}{4}, 1] \wedge \sum_{i=1}^{81} x_i = 36 \Rightarrow \sum_{i=1}^{81} (\sqrt{x_i} + x_i^2) ? 70$

973. $x_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^{2000} x_i = 2000 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2000} \arctg x_i ? 500\pi$

974. $a, b, c > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} ? \frac{9}{a+b+c}$

975. $a, b, c, d > 0 \wedge a + b + c + d = 2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} ? 16$

976. $a, b, c, d > 0 \wedge a + b + c + d = 1 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} ? 2$

977. $x_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^n x_i = n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2 + x_i + 1} ? \frac{n}{3}$

978. $x, y, z \geq 0 \wedge x + y + z = \pi \Rightarrow \sin x + \sin y + \sin z ? \frac{3\sqrt{3}}{2}$

979. $x, y, z \geq 0 \wedge x + y + z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x + \sin y + \sin z ? \frac{3}{2}$

980. $x, y, z, t \geq 0 \wedge x + y + z + t = 4 \Rightarrow \frac{e^x}{x} + \frac{e^y}{y} + \frac{e^z}{z} + \frac{e^t}{t} ? 4e$

981. $x, y, z \geq 0 \wedge \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{3} + \frac{\sqrt{z}}{6} ? 1$

982. $\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{1} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{3} + \frac{x_4^2}{4} ? \frac{12}{25}$

983. $\sum_{i=1}^n x_i = n \Rightarrow \sum_{i=1}^n e^{x_i} ? ne$ 984. $x_i < \frac{1}{2} \wedge \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n e^{x_i} ? n + \sum_{i=1}^n x_i^2$

985. $x_i > -\frac{1}{3} \wedge \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n e^{2x_i} ? n + \sum_{i=1}^n x_i^2$

986. $x_i \geq 1 \wedge \sum_{i=1}^n x_i = 2n \Rightarrow \prod_{i=1}^n (1 + x_i^2) ? 5^n$

987. $-1 \leq x_i \leq 1 \wedge \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n}{2} \Rightarrow \prod_{i=1}^n (1 + x_i^2) ? \frac{5^n}{4^n}$

988. Czy w zadaniu 986 można zastąpić $x_i \geq 1$ warunkiem $|x_i| \geq 1$?

Która z liczb jest większa

989.

$995^{995} \cdot 996^{996} \cdot 997^{997} \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} \cdot 1001^{1001} \cdot 1002^{1002} \cdot 1003^{1003} \cdot 1004^{1004} \cdot 1005^{1005}$ czy 10^{33000} ?

990.

$995^{1005} \cdot 996^{1004} \cdot 997^{1003} \cdot 998^{1002} \cdot 999^{1001} \cdot 1000^{1000} \cdot 1001^{999} \cdot 1002^{998} \cdot 1003^{997} \cdot 1004^{996} \cdot 1005^{995}$ czy 10^{33000} ?

991.

$995^{995} + 996^{996} + 997^{997} + 998^{998} + 999^{999} + 1000^{1000} + 1001^{1001} + 1002^{1002} + 1003^{1003} + 1004^{1004} + 1005^{1005}$ czy $11 \cdot 10^{3000}$?

992.

$995^{1005} + 996^{1004} + 997^{1003} + 998^{1002} + 999^{1001} + 1000^{1000} + 1001^{999} + 1002^{998} + 1003^{997} + 1004^{996} + 1005^{995}$ czy $11 \cdot 10^{3000}$?

993.

$995^{2995} \cdot 996^{2996} \cdot 997^{2997} \cdot 998^{2998} \cdot 999^{2999} \cdot 1000^{3000} \cdot 1001^{3001} \cdot 1002^{3002} \cdot 1003^{3003} \cdot 1004^{3004} \cdot 1005^{3005}$ czy 10^{99000} ?

994. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \left(\sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{1}} + \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{4}} + \dots + \sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{n}} \right) \right)$$

dla tak dobranej wartości parametru rzeczywistego p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Doprowadzić wynik do postaci $\frac{a}{b} \cdot (\sqrt{c} + d)$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

995. Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru p , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^8 + 1} dx$$

jest zbieżna.

996. Wskazać (wraz z dowodem poprawności) wartość rzeczywistą parametru $p \neq 1$, dla której

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^8 + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^8 + 1} dx .$$

997. Obliczyć

$$\frac{\int_0^{\infty} \frac{x^4}{x^8 + 1} dx}{\int_0^{\infty} \frac{x^4}{2x^8 + 1} dx} .$$

998. Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, okresowej o okresie 2π , określonej wzorem

$$f(x) = \cos \frac{3}{2}x$$

dla $x \in [-\pi, \pi)$.

999. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 9} .$$

Wskazówka 1: Wstawić $x = 0$ do szeregu Fouriera funkcji z zadania 998.

Wskazówka 2: Wstawić $x = \pi$ do szeregu Fouriera funkcji z zadania 998.

Wskazówka 3: Zastosować równość Parsewala do funkcji z zadania 998.

Wskazówka 4: Nie używać szeregów Fouriera, tylko zapisać wyraz szeregu w postaci różnicy odpowiednich wyrażeń.

Uwaga: Dwie z powyższych wskazówek prowadzą do rozwiązania, a dwie w maliny.

1000. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \cos^5 x \cdot \sin 3x .$$

1001. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \sup (\{0\} \cup \{1 - |2^n x - 4^n| : n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \}) .$$

Obliczyć

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx .$$

1002. Obliczyć

$$\int_1^7 \frac{dx}{e^x + e^4}$$

podając wynik w postaci k/e^n , gdzie $k, n \in \mathbb{N}$.

1003. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11} + \dots + n^{11})^3}{(1^{17} + 2^{17} + 3^{17} + 4^{17} + \dots + n^{17})^2}$$

podając wynik w postaci ułamka nieskracalnego.