

1. Całka nieoznaczona.
Całkowanie przez części i przez podstawienie.

Obliczyć $\int f(x)dx$ jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

580. 10^x 581. $\sqrt[m]{x^n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) 582. $a^x e^x$, $a > 0$ 583. $3,4x^{-0,17}$
 584. $1 - 2x$ 585. $\left(\frac{1-x}{x}\right)^2$ 586. $(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$ 587. $\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}$
 588. $(x+1)^{22}$ 589. $\frac{x^{100}-1}{x-1}$ 590. $\sin^2 x$ 591. $\frac{x^3}{x+1}$ 592. $\frac{x\sqrt[6]{x}+\sqrt[7]{x}}{x^2}$

Znaleźć taką funkcję F , że $F''(x)$ dane jest wzorem

593. $x^2 + 2x$ 594. $\cos x$ 595. e^{7x}

Znaleźć taką funkcję F , że

596. $F''(x) = x^2 + 1$, $F'(0) = 2$, $F(0) = 3$

597. $F'''(x) = \sin x$, $F''(0) = F'(0) = F(0) = 0$

598. $F''(x) = \frac{1}{x^2}$, $F'(1) = F'(-1) = 1$, $F(1) = F(-1) = 3$

Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

599. $x \sin 2x$ 600. xe^{-x} 601. $x3^x$ 602. $x^n \ln x$ 603. $x^3 e^{5x}$ 604. $e^x \sin^2 x$
 605. $x \sin x \cos x$ 606. $e^{3x} \sin 2x$ 607. $\sqrt{e^x - 1}$ 608. $e^x \sin e^x$ 609. xe^{x^2}
 610. $1 \cdot \sin \ln x$ 611. $\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ 612. $e^{\sqrt[3]{x}}$ 613. $\frac{1}{x \ln x \ln \ln x}$
 614. $\cos x \cdot e^{\sin x}$ 615. 6^{1-x} 616. $\sin^5 x \cos x$ 617. $\operatorname{tg} x$ 618. $xe^{x^2}(x^2+1)$
 619. $\sin 3x \cdot \sin 5x$ 620. $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$ 621. $\frac{\operatorname{arctg}^7 x + 9\operatorname{arctg}^5 x}{x^2+1}$ 622. $\frac{x^3}{(x-1)^{12}}$
 623. $\frac{\ln^7 x + \ln^2 x}{x}$ 624. $e^{-x^2} x^5$ 625. $\sin \sqrt{x}$
 626. $\frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}$ 627. $\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ 628. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Wsk. $x = \sin t$

2. Całka nieoznaczona. Całkowanie funkcji wymiernych.

Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

- 629.** $\operatorname{arctg} x$ **630.** $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$ **631.** $\frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$
632. $x^2 \ln(x+1)$ **633.** $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}$ **634.** $\frac{x}{x^2 - 7x + 10}$ **635.** $\frac{x-2}{x^2 - 7x + 12}$
636. $\frac{x}{2x^2 - 3x - 2}$ **637.** $\frac{4x+3}{(x-2)^3}$ **638.** $\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$ **639.** $\frac{x^4}{x^2+1}$
640. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ **641.** $\frac{1}{x\sqrt{x+1}}$
642. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ **643.** $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ **Wsk.** $t = e^x$ **644.** $1 \cdot \ln(1+x^2)$ **645.** $\frac{x^2}{1+x^3}$
646. $x \ln(x^2+1)$ **647.** $\frac{1}{x^2-x-1}$ **648.** $\frac{7x^6+3x^2+4x}{x^7+x^3+2x^2+4}$
649. $\sqrt{x} \ln x$ **650.** $\frac{e^x}{e^{2x}+1}$ **651.** $\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ **652.** $\frac{e^x}{e^{3x}-1}$
653. $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ **654.** $\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$ **655.** $\frac{1}{x^6+x^4}$
656. $\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2-4)}$ **657.** $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x+2}}}$ **658.** $\frac{x^4}{x^{15}-1}$
659. $\frac{1}{x^4+1}$ **Wsk.** $x^4+1 = (x^2+ax\pm 1)(x^2+bx\pm 1)$
660. $x^2 \operatorname{arctg} x$ **661.** $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$

Wyrazić I_n przy pomocy I_{n-1} lub I_{n-2}

- 662.** $I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$ **663.** $I_n(x) = \int x^n e^x dx$ **664.** $I_n(x) = \int x^n \sin x dx$
665. $I_n(x) = \int \sin^n x dx$ **Wsk.** $\sin x \cdot \sin^{n-1} x$ przez części
666. $I_n(x) = \int \ln^n x dx$ **667.** $I_n(x) = \int x^n e^{x^2} dx$

3. Całka oznaczona. Suma Riemanna i obliczanie całek.

Podać wzór na $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$ oraz obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

- 668.** $f(x) = 1$, $a = 5$, $b = 8$ **669.** $f(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$
670. $f(x) = x$, $a = 1$, $b = 5$ **671.** $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 5$
672. $f(x) = x^3$, $a = 0$, $b = 1$ **673.** $f(x) = 2x + 5$, $a = -3$, $b = 4$
674. $f(x) = x^2 + 1$, $a = -1$, $b = 2$ **675.** $f(x) = x^3 + x$, $a = 0$, $b = 4$
676. $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$

Obliczyć następujące całki poprzez konstrukcję ciągu podziałów dziedziny oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna

- 677.** $\int_2^4 x^{10} dx$ (Wsk. $2 \cdot 2^{k/n}$) **678.** $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ (Wsk. $e^{k/n}$)
679. $\int_0^{20} x dx$ **680.** $\int_1^{10} e^{2x} dx$ **681.** $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$ (Wsk. $\frac{k^3}{n^3}$)
682. $\int_{-1}^1 |x| dx$ **683.** $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ (Wsk. $2^{k/n}$) **684.** $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ (Wsk. $\frac{4k^2}{n^2}$)

Obliczyć całki oznaczone:

- 685.** $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x^{2007} dx$ **686.** $\int_0^2 \arctg[x] dx$ **687.** $\int_0^2 [\cos x^2] dx$
688. $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$ **689.** $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3} dx$ **690.** $\int_{-13}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} dx$
691. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^x} dx$ **692.** $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x^3 - x) dx$ **693.** $\int_0^1 x e^{-x} dx$
694. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ **695.** $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$ **696.** $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$
697. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ **698.** $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ **699.** $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$
700. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ **701.** $\int_0^5 |x^2 - 5x + 6| dx$ **702.** $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$
703. $\int_1^2 x \log_2 x dx$ **704.** $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$ **705.** $\int_0^{6\pi} |\sin x| dx$
706. $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^{11} x dx$ **707.** $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$
708. $\int_{-\pi}^{\pi} x^{2007} \cos x dx$ **709.** $\int_0^{2\pi} (x - \pi)^{2007} \cos x dx$

4. Całka oznaczona. Suma Riemanna i szacowanie całek.

Obliczyć granice

710. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$ 711. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{21}}$
712. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \cdot n$
713. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{3n}}$
714. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \sin \frac{3}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n} \right) \cdot \frac{1}{n}$
715. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n} + \sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+2} + \dots + \sqrt{5n}) \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$
716. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$
717. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n} \cdot (\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \dots + \sqrt[3]{2n})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}$
718. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \frac{n}{n^2+16} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$
719. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5n} + \frac{4}{5n+3} + \frac{4}{5n+6} + \frac{4}{5n+9} + \dots + \frac{4}{26n}$
720. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n} + \frac{1}{7n+2} + \frac{1}{7n+4} + \frac{1}{7n+6} + \dots + \frac{1}{9n}$
721. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n^2} + \frac{1}{7n^2+1} + \frac{1}{7n^2+2} + \frac{1}{7n^2+3} + \dots + \frac{1}{8n^2}$
722. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\sqrt{\frac{1}{n}}} + e^{\sqrt{\frac{2}{n}}} + e^{\sqrt{\frac{3}{n}}} + \dots + e^{\sqrt{\frac{n}{n}}})$
723. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+6}} + \frac{1}{\sqrt{n+9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{7n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$
724. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+0}{(3n)^3} + \frac{n^2+1}{(3n+1)^3} + \frac{n^2+2}{(3n+2)^3} + \frac{n^2+3}{(3n+3)^3} + \dots + \frac{n^2+n}{(4n)^3}$
725. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+2)^2} + \frac{n}{2(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$
726. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{n^2+(n+2)^2} + \frac{n}{n^2+(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$

Udowodnić następujące oszacowania

727. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < 2$ 728. $\frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx < \frac{1}{2}$
729. $\frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8}$ 730. $\int_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2} dx < \frac{3}{2}$
731. $\int_0^1 x(1-x^{99+x}) dx < \frac{1}{2}$ 732. $2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} dx$
733. $5 < \int_1^3 x^x dx < 31$ 734. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx < \frac{3}{4}$

735. Udowodnić oszacowanie $\frac{19}{3} < \int_2^3 x^x dx < \frac{65}{4}$. **Wskazówka:** Oszacować x^x przez x^a .

5. Całka oznaczona. Długości, pola, objętości.

Obliczyć pole figury ograniczonej następującymi krzywymi

736. $y = x^2$ i $y = 2x + 5$

737. $y = e^x$ i prostą przechodzącą przez punkty $(0, 1)$ i $(1, e)$

738. $y = \sin x$ i $y = \frac{2x}{\pi}$ **739.** $y = x^4$ i $y = x^3$

740. $y = \frac{1}{x}$ i $y = \frac{5}{2} - x$ **741.** $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$ i $x = 2$

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć długość łuku krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

742. x , 1 , 2 **743.** $2x - 3$, -7 , 12

744. x^2 , 0 , 1 **Wsk.** Skorzystać z tablic całek.

745. e^x , 1 , 2 **746.** $\sqrt{x^3}$, 6 , 10 **747.** $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 0 , 1

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX

748. x^3 , 0 , 5 **749.** e^{-x} , 0 , 10

750. $\sqrt{x}$, 0 , 4 **751.** $\sin x$, 0 , π **752.** $\cos 7x$, 0 , 2π

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX

753. $\sqrt{x}$, 0 , 1 **754.** x , 1 , 5 **755.** x^7 , 0 , 10

756. e^x , -3 , 0 **757.** $\sin x$, 0 , $\frac{3\pi}{2}$

Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru ograniczonego krzywymi o podanych równaniach, wokół osi OY

758. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 5$ **759.** $y = \sin x$ i $y = -\sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

760. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 2$ **761.** $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = e$

762. $y^2 = 1 - (x - 2)^2$

763. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \sqrt{x + 4}^3$, $0 \leq x \leq 5$.

764. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0 \leq y \leq xe^x$, $0 \leq x \leq 1$ wokół osi OX.

765. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \ln x$, $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.

766. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $\arctg x \leq y \leq \sqrt{\arctg^2 x + \sqrt{1 + \sin x}}$, $0 \leq x \leq \pi$ wokół osi OX.

767. Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plastry równej grubości. Dowieść, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

768. Od pomarańczy o grubej skórce odkrojono końce tak, aby ukazał się miąższ. Pozostałą część pokrojono na plastry równej grubości. Dowieść, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

769. Pasem o szerokości d nazywamy obszar płaszczyzny zawarty pomiędzy dwiema prostymi równoległymi odległymi o d , wraz z tymi prostymi.

Czy koło można pokryć pasami o sumie szerokości mniejszej od średnicy koła?

Pasów ma być skończenie wiele.

6. Całki niewłaściwe. Obliczanie i badanie zbieżności.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć te, które są zbieżne

$$\begin{array}{llll}
 770. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} & 771. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} & 772. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} & 773. \int_{-1}^1 \frac{x-1}{x^2-1} dx \\
 774. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} & 775. \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}} & 776. \int_0^{\infty} \cos x dx & 777. \int_1^{\infty} x^{1/x} dx \\
 778. \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx & 779. \int_0^1 e^{1/x} dx & 780. \int_1^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^3} dx & \\
 781. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} & 782. \int_0^{\infty} x^3 \sin x^4 dx & &
 \end{array}$$

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

$$\begin{array}{lll}
 783. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sin^2 x} & 784. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \arctg x} & 785. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x - \sin \sqrt{x+28}} \\
 786. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2} & 787. \int_0^{\infty} \frac{1 + \sqrt{x + |\ln x|}}{x} dx & 788. \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx \\
 789. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}} & 790. \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2 + \arctg x} dx & 791. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + \sin^2 x} \\
 792. \int_1^{\infty} e^{-1/x} dx & 793. \int_0^{\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} dx & 794. \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx
 \end{array}$$

OSZUSTWO 795. (funkcja ciągła nieujemna mająca całkę mniejszą od zera):

Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Bez trudu można sprawdzić, że f jest ciągła w zerze, a zatem obliczenie całki $\int_{-1}^1 f(x) dx$ nie powinno nastęrczać trudności. Ponieważ

$$f(x) = \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})}$$

poza pojedynczym punktem $x = 0$, po wykonaniu podstawienia $t = e^{1/x}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} = - \int_{1/e}^e \frac{dt}{t^2 + 1} = \\
 &= -\arctgt \Big|_{1/e}^e = -\arctge + \arctg \frac{1}{e} = \frac{\pi}{2} - 2\arctge < 0
 \end{aligned}$$

Wyjaśnić, na czym polega oszustwo i obliczyć prawdziwą wartość całki $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartość tych, które są zbieżne

$$796. \int_{-2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2(e^{2/x} + e^{-2/x} + 2)} dx \quad 797. \int_{-1}^1 \ln|x| dx$$

798. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n) = \frac{1}{n}$, ale całka $\int_1^\infty f(x) dx$ jest zbieżna.

799. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n) = \frac{1}{n^2}$, ale całka $\int_1^\infty f(x) dx$ jest rozbieżna.

800. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n) = n$, ale całka $\int_1^\infty f(x) dx$ jest zbieżna.

801. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n) = 0$, ale całka $\int_1^\infty f(x) dx$ jest rozbieżna.

802. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n) = e^n$, ale całka $\int_1^\infty f(x) dx$ jest zbieżna.

Kolokwium nr 7

7. Szeregi liczbowe. Obliczanie i badanie zbieżności.

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest rozbieżny.

2. ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU NIE ZALEŻY OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZYNIE WIELU POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. KRYTERIUM PORÓWNAWCZE.

Niech $\sum_{n=1}^\infty a_n$ i $\sum_{n=1}^\infty b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^\infty a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^\infty b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^\infty b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$.

4. KILKA SZEREGÓW.

$\sum_{n=1}^\infty q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q .

$\sum_{n=1}^\infty n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a .

$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log^a n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a . Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. KRYTERIUM CAUCHY'EGO.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

8. SZEREGI NAPRZEMIENNE - KRYTERIUM LEIBNIZA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{n+1}$ jest zbieżny.

Obliczyć $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, a następnie znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$:

803. $a_k = \frac{1}{7^k}$ **804.** $a_k = \frac{2^k + 5^k}{10^k}$

805. Dowieść, że $4 < \sum_{n=1}^{127} \frac{1}{n} < 7$.

806. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

807. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ **808.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ **809.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2 + 1}$ **810.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$

811. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^3 + 6n^2 + 8n + 47}$ **812.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$

813. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ **814.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$ **815.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

816. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ **817.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ **818.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}$ **819.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

$$\begin{array}{lll}
820. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}} & 821. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} & 822. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \\
823. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} & 824. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} & 825. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} \\
826. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}} & 827. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}} & 828. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^e + \pi}{n^\pi + e}
\end{array}$$

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

$$829. a_n > \frac{1}{n} \text{ dla nieskończenie wielu } n, \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > 0, \text{ szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny.}$$

$$830. a_n = \frac{1}{2^n} \text{ dla nieskończenie wielu } n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10.$$

$$831. \forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n^2} = \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.$$

$$832. \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Z}, a_n = n \text{ dla } n \leq 100, \text{ szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny.}$$

$$833. a_n = 1 \text{ dla nieskończenie wielu } n, \text{ szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny.}$$

$$834. \text{ Szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny, szeregi } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \text{ i } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \text{ są rozbieżne.}$$

$$835. \text{ Szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny, szereg } \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) \text{ jest zbieżny.}$$

$$836. \text{ Szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny, szereg } \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) \text{ jest zbieżny, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$837. \text{ Szeregi } \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) \text{ i } a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) \text{ są zbieżne, ale mają różne sumy.}$$

$$838. \text{ Szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny, szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ jest zbieżny.}$$

$$839. \text{ Szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny, szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ jest rozbieżny.}$$

Kolokwium nr 8

8. Szeregi liczbowe. Zbieżność bezwzględna i warunkowa.

Które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne:

$$840. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \quad 841. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n} \quad 842. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$$

$$843. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n + 1}{n} \quad 844. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}} \quad 845. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$$

$$846. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n} \quad 847. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} \quad 848. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$$

$$849. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 17}{3^n} \quad 850. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!} + 1}{n!} \quad 851. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}} \quad 852. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n$$

$$853. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \quad 854. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n + 3^n}} \quad 855. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 5\sqrt{n} + 27}$$

$$856. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!} \quad 857. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}} \quad 858. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) (-1)^n$$

859. Czy możemy ocenić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiemy, że

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{4} \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{5}{4} \quad \text{d) } a_n - a_{n+1} \geq \frac{1}{n}$$

860. Podać sumę szeregu, jeżeli szereg jest zbieżny.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} \quad \text{b) } \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(-6)^n} \quad \text{c) } \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{8^n} \quad \text{d) } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}$$

861. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

862. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^n}.$$

863. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^{n+2}}.$$

Kolokwium nr 9

9. Szeregi potęgowe.

Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$864. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n+7} \quad 865. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} x^n \quad 866. \sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2} \quad 867. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+10}{n} x^n$$

$$868. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!} x^n$$

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$869. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^{10}} \quad 870. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} \quad 871. \sum_{n=0}^{\infty} 50^n x^{2n+5} \quad 872. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$873. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2 + n} - n} \quad 874. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+5} x^{3n+7}}{n \cdot 6^{2n}} \quad 875. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{(n!)^3} \quad 876. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+7} x^{6n}}{\sqrt{n}}$$

$$877. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^{2^n} \quad 878. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n x^{3n}}{(81n+2)^n} \quad 879. \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^2} x^{n^3} \quad 880. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} x^n}{n^2}$$

881. Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x = 1$.

882. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

883. Udowodnij, że

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

884. Podać przykład szeregów potęgowych, takich że $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = 1$ dla wszystkich $|x| < 1$, mimo iż szeregi te nie są funkcjami stałymi.

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu n funkcji zmiennej x danej wzorem

885. $\ln(x^{10})$ **886.** $x \ln x$ **887.** $\sqrt{x}$ **888.** $x^2 \sin x$ **889.** $\frac{1-x}{1+x}$ **890.** $x e^x$

891. $\sin 5x$ **892.** x^7 **893.** e^{4x} **894.** $x + \frac{1}{x}$ **895.** $x^2 e^{-x}$ **896.** $\sin^2 x$

Obliczyć sumy szeregów potęgowych

897. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$ **898.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ **899.** $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ **900.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Rozwinąć daną funkcję w szereg potęgowy

901. $\sqrt{x+2}$ **902.** $\frac{1}{x+3}$ **903.** $\ln(x+e)$

Kolokwium nr 10

10. Szeregi zespolone.

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z , że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n .$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n .$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n .$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R = 0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R = +\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

$$\begin{array}{llll} \text{904. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1} & \text{905. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i} & \text{906. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i} & \text{907. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2 + i} \\ \text{908. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i} & \text{909. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + i}{n^4 - i} & \text{910. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} & \text{911. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n} \end{array}$$

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

$$\begin{array}{lllll} \text{912. } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n & \text{913. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2} & \text{914. } \sum_{n=1}^{\infty} n z^n & \text{915. } \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} & \text{916. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n} \\ \text{917. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{n^3 + i} & \text{918. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 z^n}{n^4 + i} & \text{919. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} & \text{920. } \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n) z)^n & \text{921. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n} \end{array}$$

Kolokwium nr 11

11. Szeregi funkcyjne

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciąg funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do f , jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , a ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g , to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$$

922. Udowodnij, że jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ o promieniu zbieżności $R > 0$ zeruje się dla wszystkich $|x| < R$, to $c_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

923. Udowodnij, że jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dla wszystkich $|x| < R$, gdzie $R > 0$, to $a_n = b_n$ dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Obliczyć sumy szeregów potęgowych

$$\mathbf{924.} \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} \quad \mathbf{925.} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} \quad \mathbf{926.} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \quad \mathbf{927.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Rozwinąć daną funkcję w szereg potęgowy

$$\mathbf{928.} \ln(1-x) \quad \mathbf{929.} \arctg(x) \quad \mathbf{930.} \sin^2(x)$$

931. Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

932. Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3 + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

933. Wyprowadzić wzór na sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}.$$

Kolokwium nr 12

12. Szeregi Fouriera.

Szeregiem Fouriera funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie 2π , całkowalnej na przedziale długości 2π , nazywamy szereg

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

Powyższe całki nie zależą od wyboru dolnej granicy przedziału całkowania.

Jeżeli ponadto funkcja f jest przedziałami monotoniczna oraz dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2},$$

to f jest (punktowo) sumą swojego szeregu Fouriera.

Równość Parsevala:

$$\int_A^{A+2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji

934. $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$ **935.** $f(x) = |x|$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

936. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\pi, \pi)$ **937.** $f(x) = x^2$ dla $x \in (0, 2\pi)$

938. $f(x) = x^2$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ **939.** $f(x) = [\frac{x}{\pi}]$ dla $x \in (0, 2\pi)$

940. $f(x) = e^x$ dla $x \in (0, 2\pi)$ **941.** $f(x) = e^x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

942. $f(x) = |\sin x|$ dla $x \in (0, 2\pi)$ **943.** $f(x) = e^{|x|}$ dla $x \in (-\pi, \pi)$

944. $f(x) = \sin \frac{3}{2}x$ dla $x \in (0, 2\pi)$

945. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ \cos x & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

946. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

947. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } 0 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{dla } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$

948. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

stosując wzór Parsewala do $f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$ oraz wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwa wyniki.

949. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2}$$

wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera funkcji $f(x) = \cos(x\sqrt{2})$ na $(0, 2\pi)$.

950. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

używając $f(x) = x(\pi - |x|)$ na $(-\pi, \pi)$.

951. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos 5x \cdot \cos 7x .$$

952. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^4 x .$$

953. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{8\pi/7}^{22\pi/7} \cos^{10} x .$$