

1-1. Indukcja matematyczna.

Szanowni Państwo, poniżej znajdują Państwo podstawowe informacje dotyczące indukcji matematycznej.

0. Anegdota o młodym Gaussie. Pewnego razu nauczyciel klasy szkoły podstawowej, do której uczęszczał młody Gauss, potrzebował trochę czasu podczas lekcji, aby omówić pewne kwestie ze swoim asystentem. Aby zająć czymś swych uczniów polecił im wysumowanie wszystkich liczb od 1 do 100. Ze względu na poziom wiedzy tych uczniów zadanie było jasne o tyle, że mają obliczyć sumę:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = ?$$

Wierząc, że tego typu zadanie zajmie uczniów na wystarczającą ilość czasu, zdziwił się, gdy “w mgnieniu oka” przy jego biurku pojawił się uczeń (C. F. Gauss) meldujący wykonanie zadania z wynikiem 5050.

Ta odważna postawa ucznia zainteresowała nauczyciela i jego asystenta. Po krótkim “przesłuchaniu” ucznia okazało się, że tak szybki wynik uzyskał łącząc sumowane liczby w (skrajne) pary i stwierdzając, że (po połączeniu danych stu liczb w pary) tych par jest 50:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 &= (1 + 100) + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 = (1 + 100) + (2 + 99) + 3 + \dots + 98 = \\ &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots = 101 + 101 + 101 + \dots = 101 \cdot 50 = 5050. \end{aligned}$$

Tak więc młody Gauss nie tylko potrafił podać wynik zadanej sumy, ale również umiał zgrabnie wyjaśnić jak go uzyskał :). Chociaż nie jest do końca jasne, czy zdarzenia opisane w tej anegdocie w istocie się zdarzyły, to (dla uproszczenia) w dalszej części wykładu założymy, że tak.

1. Uogólnienie 1. Powyższy wynik Gaussa można uogólnić. Takie uogólnienie polega na tym, że metoda sumacyjna wykorzystana przez Gaussa działa również dla sumy

$$1 + 2 + 3 + \dots + 998 + 999 + 1000 = ?$$

A w ogólności, dla sumy

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n,$$

gdy n jest liczbą parzystą.

W istocie, gdy n jest liczbą parzystą, to powyższa suma może zostać obliczona (tak jak to zrobił Gauss) w analogiczny sposób:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \dots = (1 + n) \cdot \frac{n}{2}.$$

Czyli ponownie łączymy sumowane liczby w pary (suma w każdej parze to $1 + n$) i mnożymy to przez liczbę par (czyli $\frac{n}{2}$).

2. Uogólnienie 2. A jak poradzić sobie z sumą

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n,$$

gdy n jest liczbą nieparzystą?

Ponownie możemy połączyć sumowane wyrazy w (skrajne) pary. Tym razem jednak “środkowy” wyraz pozostanie bez pary. Łącząc (skrajne) wyrazy w pary tym razem otrzymamy, że

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \dots + sw,$$

gdzie sw oznacza środkowy wyraz w zadanej sumie.

Pojawia się więc następujący problem: Gdy n jest liczbą nieparzystą, to środkowy wyraz sw w poniższej sumie

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

wyraża się jako

$$sw = ?$$

Aby rozwiązać ten problem zauważmy, że sw (czyli ten środkowy wyraz) powinien być bliski “środku”, czyli $\frac{n}{2}$. Ponieważ n jest nieparzyste, to w takim razie sw może być równe $\frac{n-1}{2}$, lub $\frac{n+1}{2}$.

Żeby wybrać poprawną opcję z tych dwóch podanych powyżej możemy rozważyć prosty przykład. Dla $n = 3$ środkowy wyraz sumy

$$1 + \dots + n = 1 + 2 + 3,$$

to

$$2 = \frac{3+1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Podobnie dla $n = 5$ środkowy wyraz sumy

$$1 + \dots + n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5,$$

to

$$3 = \frac{5+1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Dzięki temu możemy uwierzyć, że dla nieparzystych n środkowy wyraz sw w sumie

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

wyraża się jako

$$sw = \frac{n+1}{2}.$$

To pozwala nam powrócić do obliczenia sumy

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

w przypadku, gdy n jest nieparzyste.

Możemy więc stwierdzić, że w tym przypadku

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \dots + sw =$$

$$(1+n) \cdot \frac{n-1}{2} + sw = (1+n) \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2},$$

bo liczba par w tym przypadku wynosi $\frac{n-1}{2}$, a $sw = \frac{n+1}{2}$.

W skrócie, powyższe kalkulacje dają, że

$$1 + 2 + \dots + n = (1+n) \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{1+n}{2}((n-1)+1) = \frac{1}{2}(1+n)n.$$

Warto zaznaczyć, że ten wynik można też otrzymać zauważając, że dla nieparzystych n

$$1 + 2 + \dots + n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = [\text{łącząc w (skrajne) pary}] = n + n + \dots =$$

$$[\text{zliczając liczbę par}] = n \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Łącząc wyniki uzyskane dla n parzystych i nieparzystych otrzymujemy następujący

Fakt. Dla każdej liczby naturalnej n

$$(*) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}(n+1)n.$$

Uwaga: Na naszych zajęciach przyjmujemy konwencję, w której liczby naturalne nie zawierają zera. Czyli, że zbiór liczb naturalnych to

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

3. Indukcja matematyczna. Postaramy się udowodnić Fakt uzyskany w poprzedniej sekcji stosując indukcję matematyczną.

W tym celu oznaczamy formułę (*) przez $T(n)$, czyli

$$T(n) : \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}(n+1)n.$$

To oznaczenie rozumiemy tak, że np. dla $n = 7$

$$T(7) : \quad 1 + 2 + \dots + 7 = \frac{1}{2}(7+1)7.$$

Za n możemy jednak podstawić nie tylko ustaloną liczbę, ale również np. $n+1$ otrzymując

$$T(n+1) : \quad 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{1}{2}((n+1)+1)(n+1) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1).$$

Po wprowadzeniu oznaczeń przeprowadzamy dowód indukcyjny, który składa się z dwóch części.

1) Sprawdzenie. Dokonujemy sprawdzenia, że formuła $T(n)$ jest prawdziwa dla początkowej wartości n . Czasem należy wykonać to sprawdzenie dla paru początkowych wartości n , ale w tym przykładzie wystarczy wykonać sprawdzenie dla $n = 1$.

Tak więc sprawdzamy czy $T(1)$ jest prawdą:

$$T(1) : \quad 1 = \frac{1}{2}(1+1)1.$$

Wyszło, że jest, więc przechodzimy do drugiej części dowodu.

2) Krok indukcyjny. Zakładamy, że $T(n)$ jest prawdą dla pewnej (ustalonej) liczby naturalnej n i staramy się wykazać, że w takim razie prawdziwa jest również formuła $T(n+1)$.

Zakładamy więc, że dla pewnej (ustalonej) liczby naturalnej n zachodzi

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}(n+1)n$$

(jest to tzw. założenie indukcyjne) i staramy się wykorzystać tę informację, aby obliczyć sumę

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1).$$

Korzystając z założenia indukcyjnego szukaną sumę można obliczyć następująco

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)n + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = (n+1) \frac{n+2}{2}.$$

Otrzymaliśmy więc, że

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1),$$

czyli otrzymaliśmy $T(n+1)$.

W skrócie, pokazaliśmy, że jeśli dla pewnego n formuła $T(n)$ jest prawdą, to z tego wynika, że formuła $T(n+1)$ też jest prawdą.

3) Dowód możemy zakończyć sformułowaniem: "Na mocy indukcji matematycznej $T(n)$ jest prawdą dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$."

4. Ciąg arytmetyczny. Warto dodać, że Fakt wykazany indukcyjnie w poprzedniej sekcji jest przykładem znanej nam ze szkoły formuły na sumę ciągu arytmetycznego.

Przypomnijmy, że ciąg arytmetyczny (a_n) spełnia

$$a_{n+1} - a_n = r$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Dzięki temu

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n.$$

Uwaga: Dowód powyższego wzoru na sumę ciągu arytmetycznego można przeprowadzić w oparciu o Fakt wykazany indukcyjnie w poprzedniej sekcji.

5. Ciąg geometryczny. Przypomnijmy jeszcze, że ciąg geometryczny (a_n) spełnia

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Dzięki temu

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

dla $q \neq 1$.

Aby uzasadnić powyższy wzór na sumę ciągu geometrycznego zauważmy, że

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

bo

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{dla } q \neq 1.$$

Powyższy wzór warto zapamiętać i można go łatwo udowodnić mnożąc obie strony powyższego równania przez $q - 1$ i skracając odpowiednie wyrazy uzyskane po lewej stronie tego równania. My jednak w ramach ćwiczenia indukcji postaramy się wykazać ten wzór indukcyjnie:

0) Oznaczenie.

$$T(n) : \quad 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{dla } q \neq 1.$$

1) Sprawdzenie. Dla $n = 1$ mamy, że $T(1)$ jest prawdą, bo

$$1 = \frac{q^1 - 1}{q - 1}.$$

2) Krok indukcyjny. Zakładamy, że

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ (czyli, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $T(n)$). Wówczas

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} + q^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{q^{n+1} - q^n}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

więc zachodzi $T(n + 1)$.

3) Konkluzja. Na mocy indukcji matematycznej $T(n)$ jest prawdą dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.