

10. Optymalizacja i reguła de l'Hospitala

Szanowni Państwo. Poniżej znajdują się informacje dotyczące schematu optymalizacji oraz zastosowania reguły de l'Hospitala.

1. Wstęp do optymalizacji. Optymalizacja polega na znalezieniu takich wartości argumentów, aby funkcja, która od nich zależy, osiągnęła optymalną (największą lub najmniejszą) wartość.

U nas na szczęście funkcja będzie zależeć tylko od jednej zmiennej (tzn. będzie mieć tylko jeden argument) i będziemy się starać znaleźć jej wartość maksymalną (w skrócie “max.”) i jej wartość minimalną (w skrócie “min.”) oraz te argumenty (czyli wartości zmiennej), dla których te optymalne (ekstremalne) wartości funkcji są osiągane.

Ważne jest to, że ten nasz “prosty” przypadek z jedną zmienną pozwala na zdobycie intuicji, która będzie potrzebna do zrozumienia procesu optymalizacji funkcji wielu zmiennych. Taki proces optymalizacji z wieloma zmiennymi zostanie wyjaśniony na zajęciach z Analizy 3 i od lat pojawia się (czasami) jako jedno z zadań na naszym egzaminie licencjackim.

2. Przykład optymalizacji. Rozważmy następujące

Zadanie. *Niech*

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji f oraz miejsca, gdzie te wartości są osiągane.

Rozwiązanie. Rozwiązanie tego zadania polega na zastosowaniu tzw. *algorytmu optymalizacji*. W tym przypadku wygląda on następująco:

a) Sprawdzamy dziedzinę zadanej funkcji.

W tym zadaniu upewniamy się więc, że dziedziną powyższej funkcji f jest przedział $(-\infty, +\infty)$.

b) Obliczamy pochodną zadanej funkcji.

W tym zadaniu obliczamy więc, że

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + x + 1} \right)' = \frac{x^2 + x + 1 - x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

c) Znajdujemy tzw. *punkty krytyczne*, czyli te wartości zmiennej x , dla których $f'(x) = 0$, bądź $f'(x)$ nie istnieje.

W tym zadaniu widzimy, że $f'(x)$ istnieje dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz, że

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} = 0 \iff x = \pm 1,$$

czyli jedyne punkty krytyczne to $x = \pm 1$.

d) Badamy zachowanie funkcji w punktach krytycznych i na skraju dziedziny. W punktach krytycznych należących do dziedziny obliczamy wartość funkcji, a na skraju dziedziny obliczamy wartość funkcji, lub jej granicę.

W tym zadaniu skraj dziedziny to $\pm\infty$ i tam musimy policzyć granicę funkcji f . Natomiast w punktach krytycznych $x = \pm 1$ łatwo jest obliczyć wartość funkcji f . Widać więc, że wygląda to tak:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + x + 1} = 0,$$

$$f(-1) = \frac{-1}{1 + -1 + 1} = -1,$$

$$f(1) = \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + x + 1} = 0.$$

e) Spośród wyżej znalezionych wartości wybieramy największą i najmniejszą. Patrzymy, gdzie te ekstremalne wartości są osiągane i piszemy odpowiedź:

“ f przyjmuje max. ... w punkcie ..., f przyjmuje min. ... w punkcie ...”.

W tym zadaniu wygląda to tak:

“ f przyjmuje max. $\frac{1}{3}$ w punkcie $x = 1$, f przyjmuje min. -1 w punkcie $x = -1$ ”,

co kończy **Rozwiązanie** tego **Zadania**.

f) W razie kłopotów z porównaniem wartości funkcji (lub granic) obliczonych w punkcie d) należy zastosować pogłębioną analizę w oparciu o zbadanie znaku f' .

Uwaga: Po rozwiązaniu tego zadania uzyskujemy dla $x \in \mathbb{R}$ optymalne oszacowanie

$$-1 \leq \frac{x}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{3}$$

pozwalające uzyskać optymalne oszacowanie

$$\left| \frac{x}{x^2 + x + 1} \right| \leq 1.$$

Widać więc, że dowolne oszacowania funkcji f typu $C \leq f(x) \leq D$, albo $|f(x)| \leq M$ można uzyskać znajdując minimum i maksimum funkcji f .

3. Algorytm optymalizacji. W ogólnym przypadku optymalizacja wygląda następująco.

Mamy daną funkcję f . Jej dziedzina może być sztucznie zawężona i wówczas musi być podana. W uproszczeniu możemy myśleć, że tą dziedziną jest przedział (może to też być suma przedziałów). Aby znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f wykonujemy następujące kroki.

a) Sprawdzamy dziedzinę zadanej funkcji. To znaczy upewniamy się, że podana dziedzina jest prawidłowa i staramy się stwierdzić, jakie są krańce tej dziedziny.

b) Obliczamy pochodną zadanej funkcji.

c) Znajdujemy *punkty krytyczne*, czyli te wartości zmiennej x , dla których $f'(x) = 0$, bądź $f'(x)$ nie istnieje.

d) Badamy zachowanie funkcji w punktach krytycznych i na skraju dziedziny. W punktach krytycznych obliczamy wartość funkcji f , a na skraju dziedziny obliczamy wartość funkcji, lub jej granicę.

Uwaga: W tym kroku bierzemy tylko te punkty krytyczne, które należą do dziedziny funkcji f .

e) Spośród wyżej znalezionych wartości wybieramy największą i najmniejszą. Patrzymy, gdzie te ekstremalne wartości są osiągane i piszemy odpowiedź:

“ f przyjmuje max. ... w punkcie ..., f przyjmuje min. ... w punkcie ...”.

albo

“ f ma max. ... w punkcie ..., f ma min. ... w punkcie ...”.

albo

“ $f(\dots) = \dots - \max.$, $f(\dots) = \dots - \min.$ ”.

f) W razie kłopotów z porównaniem wartości funkcji (lub granic) obliczonych w punkcie

d) należy zastosować pogłębioną analizę w oparciu o zbadanie znaku f' .

Przykład. Postarajmy się zoptymalizować funkcję

$$f(x) = x \ln(x^2)$$

dla $x \in [-1, \frac{1}{3}]$.

a) Po sprawdzeniu dziedziny widać, że jest mały problem. W punkcie $x = 0$ funkcja nie jest określona. Dlatego powinniśmy wyłączyć ten punkt z dziedziny i uznać, że dziedziną optymalizowanej funkcji jest $[-1, 0) \cup (0, \frac{1}{3}]$. Dzięki temu końcami tej dziedziny są punkty $-1, 0, \frac{1}{3}$.

b) Obliczamy pochodną danej funkcji.

$$f'(x) = (x \ln(x^2))' = \ln(x^2) + x \cdot \frac{2}{x} = \ln(x^2) + 2$$

c) Znajdujemy *punkty krytyczne*.

Widać, że $f'(x)$ nie istnieje dla $x = 0$ czyli w punkcie, który wyłączyliśmy z dziedziny.

Równanie

$$f'(x) = 0$$

rozwiązujemy następująco:

$$\ln(x^2) + 2 = 0 \iff \ln(x^2) = -2 \iff x^2 = e^{-2} \iff x = \pm \frac{1}{e}.$$

d) Badamy zachowanie funkcji w punktach krytycznych i na skraju dziedziny.

Znalezione punkty krytyczne, które **należą do dziedziny** to $x = -\frac{1}{e}$. Punkt $x = \frac{1}{e}$ musimy odrzucić, bo $\frac{1}{e} > \frac{1}{3}$.

Punkty na skraju dziedziny to $-1, 0, \frac{1}{3}$ (proszę zauważyć, że wcześniej odrzucony punkt $x = 0$ i tak wraca do naszych rozważań).

W punktach krytycznych ($x = -\frac{1}{e}$) obliczamy wartość funkcji f , a na skraju dziedziny ($x = -1, 0, \frac{1}{3}$) obliczamy wartość funkcji, lub jej granicę.

$$f(-1) = -1 \cdot \ln(1) = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{2}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\pm\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x) = 0.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{3^2}\right) = -\frac{2}{3} \ln(3)$$

e) Spośród wyżej znalezionych wartości wybieramy największą i najmniejszą. Ponieważ

$$-\frac{2}{3} \ln(3) < 0 < \frac{2}{e},$$

to sprawa jest jasna. Patrzymy, gdzie te ekstremalne wartości są osiągane i piszemy odpowiedź:

“ f przyjmuje max. $\frac{2}{e}$ w punkcie $-\frac{1}{e}$, f przyjmuje min. $-\frac{2}{3} \ln(3)$ w punkcie $\frac{1}{3}$ ”.

albo

“ f ma max. $\frac{2}{e}$ w punkcie $-\frac{1}{e}$, f ma min. $-\frac{2}{3}\ln(3)$ w punkcie $\frac{1}{3}$ ”,

albo

“ $f(-\frac{1}{e}) = \frac{2}{e}$ - max., $f(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}\ln(3)$ - min. ”.

Jak widać w tym przykładzie nie było problemu z porównaniem uzyskanych wartości. Aby zobaczyć jak sobie radzić z takim problemem popatrzmy na kolejny

Przykład. Postaramy się zoptymalizować tą samą funkcję

$$f(x) = x\ln(x^2)$$

ale dla $x \in [\frac{1}{3}, 1]$.

Oczywiście możemy użyć poprzednich obliczeń i przejść do ostatniego etapu.

Punkt krytyczny to $\frac{1}{e}$, a punkty na skraju dziedziny to $\frac{1}{3}, 1$. Tak więc

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{3^2}\right) = -\frac{2}{3}\ln(3)$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{2}{e}$$

$$f(1) = 1 \cdot \ln(1) = 0$$

i widać, że f przyjmuje max. 0 w punkcie 1, ale jest problem z porównaniem dwóch pozostałych wartości.

Dlatego warto zbadać znak pochodnej. Wiemy, że $f'(x) = \ln(x^2) + 2$. Skoro $x > 0$, to $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ i dlatego $f'(x) = 2\ln(x) + 2$.

Badanie znaku pochodnej polega na rozwiązaniu nierówności

$$f'(x) > 0.$$

Mamy więc

$$f'(x) > 0 \iff 2\ln(x) + 2 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \frac{1}{e}$$

i dzięki temu dowiadujemy się od razu, że w takim razie

$$f'(x) < 0 \iff x < \frac{1}{e}.$$

To oznacza, że dla $x \in (0, \frac{1}{e})$ pochodna jest ujemna i dlatego funkcja f jest tam **malejąca**, a dla $x \in (\frac{1}{e}, \infty)$ pochodna jest dodatnia i dlatego funkcja f jest tam **rosnąca**.

Skoro więc f jest malejąca dla $x \in (0, \frac{1}{e})$ oraz $\frac{1}{3} < \frac{1}{e}$, to

$$f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{e}\right).$$

Widać więc, że f przyjmuje min. w punkcie $\frac{1}{e}$, co pozwala nam dokończyć zadanie optymalizacji tej funkcji: f ma max. 0 w punkcie 1, f ma min. $-\frac{2}{e}$ w punkcie $\frac{1}{e}$.

4. Ważne fakty i pojęcia. Warto znać poniższe fakty i pojęcia.

Fakt. Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to przyjmuje swoją największą i najmniejszą wartość.

Tu jest ważne, że przedział $[a, b]$ jest **domknięty**. Np. funkcja $f(x) = x$ z dziedziną $x \in (0, 1)$ nie przyjmuje swoich ekstremalnych wartości na tym przedziale.

Teraz trochę pojęć: Ekstrema funkcji dzielą się na globalne i lokalne. Globalne ekstrema to największa i najmniejsza wartość funkcji (na danej dziedzinie). Ekstrema lokalne, to lokalne minima i lokalne maksima funkcji.

Funkcja f ma w punkcie a lokalne maksimum $f(a)$ jeśli istnieje otoczenie punktu a takie, że $f(x) \leq f(a)$ dla wszystkich x należących do tego otoczenia.

Funkcja f ma w punkcie a lokalne minimum $f(a)$ jeśli istnieje otoczenie punktu a takie, że $f(a) \leq f(x)$ dla wszystkich x należących do tego otoczenia.

Fakt. Jeśli funkcja f ma w punkcie a ekstremum lokalne, to a jest punktem krytycznym, tzn. $f'(a) = 0$, bądź $f'(a)$ nie istnieje.

[Warto wiedzieć, że powyższe nie działa w drugą stronę. Tzn. może się zdarzyć, że a jest punktem krytycznym, ale funkcja nie ma ekstremum w tym punkcie (np. $f(x) = x^3$ ma punkt krytyczny $a = 0$, ale nie ma w tym punkcie żadnego ekstremum).]

Powyższy fakt pozwala zrozumieć dlaczego algorytm optymalizacji działa prawidłowo. Wyszukuje on wszystkie punkty będące kandydatami do tego, aby dana funkcja osiągała w nich ekstrema globalne. W ostatnim kroku każdy z tych kandydatów musi być zweryfikowany, aby wyłonić z nich prawdziwych “zwycięzców”.

5. Zadanie z de l'Hospitala. Reguła de l'Hospitala (czytaj: “delopitala”) służy do obliczania niektórych trudnych granic.

Jedną z takich trudnych granic jest

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = ?$$

No ale wiadomo, że “z de l'Hospitala”

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = \frac{e^0}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Szczególny typ zadań sprawdzający opanowanie pojęcia pochodnej i reguły de l'Hospitala pojawia się czasem na egzaminach i (na przykładzie) wygląda następująco.

Zadanie. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Znajdź A takie, że powyższa funkcja f jest różniczkowalna w zerze i oblicz $f'(0)$.

Tego typu zadanie trudno jest rozwiązać bez uprzedniego doświadczenia tego typu zadań.

Na początek zaznaczmy, że obliczenia wykonane w (*) pozwalają stwierdzić, że $A = 1$. Wynika to z tego, że jeśli funkcja f ma być różniczkowalna w punkcie $x = 0$, to musi być tam ciągła. Dlatego, widząc takie zadanie można w odpowiedzi napisać, że

“ f musi być ciągła w zerze, więc

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = \frac{e^0}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Niestety nie umiem podać wartości $f'(0)$.”

Powyższe rozwiązanie daje nadzieję na uzyskanie połowy punktów przypisanych za poprawne rozwiązanie całego **Zadania**.

Aby w pełni rozwiązać to **Zadanie** (bez użycia (*)) postępujemy następująco.

Przypominamy sobie definicję pochodnej funkcji f w punkcie a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Dzięki temu widać, że skoro w **Zadaniu** musimy znaleźć $f'(0)$, to podstawiamy $a = 0$ i dostajemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Żeby nie męczyć się z “ h ”, możemy tą literkę zastąpić bardziej przyjazną literką “ x ” i stwierdzić, że

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

To pozwala nam zacząć pisać rozwiązanie tego **Zadania**.

Rozwiązanie. Będzie ciężko, ale damy radę :)

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{\sin(x)} - A}{x},$$

czyli na razie za $f(x)$ podstawiliśmy wzór podanej funkcji, a za $f(0)$ podstawiliśmy A .

Walczymy dalej

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{\sin(x)} - A}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1 - A \sin(x)}{\sin(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - A \sin(x)}{x \sin(x)}.$$

Teraz wkracza “delopital”

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - A \sin(x)}{x \sin(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - A \cos(x)}{\sin(x) + x \cos(x)} = \left[\frac{e^0 - A \cos(0)}{\sin(0) + 0 \cdot \cos(0)} = \frac{1 - A}{0} \right]$$

i widać (bez użycia $(*)$), że $A = 1$. Wynika to z tego, że skoro pochodna $f'(0)$ ma być skończona, to nie ma innej opcji niż $A = 1$, bo w przeciwnym wypadku $f'(0) = \left[\frac{1-A}{0} \right]$ nie ma szansy na osiągnięcie skończonej wartości.

Wiedząc, że $A = 1$, możemy kontynuować nasze obliczenia, aby znaleźć $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - A \cos(x)}{\sin(x) + x \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x) + x \cos(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)}.$$

Czyli znowu pojawił się “delopital” pozwalając na uzyskanie wyniku stwierdzającego, że

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{1 + 0}{2 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Dzięki temu możemy napisać

Odpowiedź. $A = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$.