

Pochodne wyższych rzędów

Drugą pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę $f''(x_0) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ (o ile ta granica istnieje).

Czyli druga pochodna jest pochodną pochodnej danej funkcji. Podobnie określa się następne pochodne: f''' , $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, ...

Przykład.

Dla $f(x) = 7x^4 + \pi x^3 - 2x + \sqrt{2}$ mamy:

$$f'(x) = 28x^3 + 3\pi x^2 - 2, f''(x) = 84x^2 + 6\pi x, f^{(3)}(x) = 168x + 6\pi, f^{(4)}(x) = 168 \text{ i } f^{(k)}(x) = 0 \text{ dla } k \geq 5.$$

Dla $f(x) = \sin x$ mamy:

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x \text{ i widać, że dalej się powtarza (co 4).}$$

Dzięki wzorom trygonometrycznym można to ująć zgrabną formułą: $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$.

Dla $f(x) = (1+x)^a$ mamy:

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1}, f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}, f^{(k)}(x) = a(a-1)(a-2) \dots (a-k+1)(1+x)^{a-k} = k! \binom{a}{k} (1+x)^{a-k}.$$

Uwaga.

Określenie $\binom{a}{k} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{a(a-1)(a-2) \dots (a-k+1)}{k!}$ dopuszcza wstawianie za a dowolnej liczby rzeczywistej.

Dla naturalnego a , $a \geq k$, jest to zgodne z tym, co znasz z kombinatoryki; Newton tak o tym myślał.

Matematycy zazwyczaj (patrz wyżej) przedstawiają pochodne jako pewną "zonglerkę znaczkami".

Trzeba pamiętać, że Newton je wymyślił po to, by prosto nimi opisywać realny świat fizyczny.

(Nie tylko po to, by zapisać $F = ma$, gdzie a to druga pochodna przemieszczenia po czasie.)

Inna notacja:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2},$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}.$$

Wzór Taylora

Przykład.

Powiedzmy, że mamy pewną informację o funkcji f , że

$$\text{w ustalonym punkcie } x_0 \text{ jest: } f(x_0) = 7, f'(x_0) = \pi, f''(x_0) = \sqrt{2}, f'''(x_0) = \sqrt{3}.$$

$$\text{Wielomian } w(x) = 7 + \pi \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot (x - x_0)^3$$

ma też te własności, czyli:

$$f(x_0) = 7 = w(x_0), f'(x_0) = \pi = w'(x_0), f''(x_0) = \sqrt{2} = w''(x_0), f'''(x_0) = \sqrt{3} = w'''(x_0).$$

W innych punktach $f(x)$ i $w(x)$ mogą się różnić; o tym mówi poniższe twierdzenie.

Wśród wielomianów stopnia ≤ 3 jedynie w spełnia owe warunki.

Twierdzenie. (Wzór Taylora)

Niech f będzie funkcją n -krotnie różniczkowalną w każdym punkcie przedziału o końcach x_0 i x . Wtedy istnieje takie $\bar{x}$ pomiędzy x_0 i x , że

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\bar{x}) \cdot (x - x_0)^n.$$

Uwaga. Zauważ, że $\bar{x}$ występuje tylko jako argument n -tej pochodnej w ostatnim składniku po prawej - zwanym resztą R_n . Poza R_n pochodne są obliczane w x_0 (zazwyczaj to jest 'ładny' punkt).

Przy ustalonym x_0 suma po prawej stronie równości, BEZ reszty R_n , jest wielomianem zmiennej x stopnia $\leq (n-1)$.

Uwaga. Dla $n = 1$ jest to dokładnie tw. Lagrange'a (przenieś $f(x_0)$ na lewą stronę i podziel stronami przez $(x - x_0)$).

Przykład.

$$\text{Niech } f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1 \text{ i } n = 2. \text{ Mamy: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Wstawiając $x_0 = 1$ mamy:

$$\sqrt{x} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (x - 1)}_{w_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} \cdot (x - 1)^2}_{R_2}.$$

Równanie $y = w_1(x)$ jest równaniem stycznej do f w x_0 .

Dla $x = 1,8$ można napisać: $\sqrt{1,8} \approx w_1(1,8) = 1,4$; oszacowanie R_2 pozwoli ocenić błąd tego przybliżenia:

$$|f(x) - w_1(x)| = |\sqrt{1,8} - 1,4| = |R_2| = \left| \frac{-1}{8\sqrt{x^3}} \cdot (1,8 - 1)^2 \right| \leq \frac{1}{8\sqrt{1^3}} \cdot 0,8^2 = 0,08.$$

Można poprawić dokładność stosując wzór Taylora z $n = 3$; mianowicie:

$$\sqrt{x} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (x - 1)^2}_{w_2(x)} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8\sqrt{x^5}} \cdot (x - 1)^3}_{R_3}.$$

Wielomian w_2 lepiej niż styczna w_1 przybliża f w pobliżu x_0 :

Dla $x = 1,8$ mamy: $\sqrt{1,8} \approx w_2(1,8) = 1,48$; z błędem nie większym niż 0,032, bo

$$|f(x) - w_2(x)| = |\sqrt{1,8} - 1,48| = |R_3| = \left| \frac{1}{16\sqrt{x^5}} \cdot (1,8 - 1)^3 \right| \leq \frac{1}{16\sqrt{1^5}} \cdot 0,8^3 = 0,032.$$



Ćwiczenie. Jak na wykresach zobaczyć wielkości R_2 i R_3 ?

Przykład.

Niech $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ i $n = 6$. Łatwo dostajemy $f^{(k)}(x) = e^x$ i $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, skąd

$$e^x = 1 + \underbrace{(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5}_{w_5(x)} + \underbrace{\frac{1}{6!}e^{\xi}(x-0)^6}_{R_6} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + e^{\xi} \frac{x^6}{720}.$$

Dla każdego $x \in [0, 1]$ mamy $|e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120})| \leq e^1 \frac{x^6}{720} \leq 3 \frac{1^6}{720} = \frac{1}{240} = 0,0041666\dots$, czyli $w_5(x)$ przybliża e^x na przedziale $[0, 1]$ z błędem nie większym od $5/1000$.

Napis $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ czy też $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ nazywamy **szeregiem Taylora** funkcji e^x w $x_0 = 0$.

Dla $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$ mamy: $f^{(k)}(x) = k! \cdot (1-x)^{-(k+1)}$ i $f^{(k)}(0) = k!$, skąd szereg Taylora dla $f(x) = \frac{1}{1-x}$ w $x_0 = 0$ jest równy $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$.

Szereg Taylora jest w pewnym sensie "nieskończonym wielomianem", przykładem obiektu, którego sens trzeba doprecyzować; "nieskończone dodawanie" można rozumieć opatrnie. Szczegółowo będzie to omawiane w drugim semestrze. Zauważmy tylko, że w ostatnim przykładzie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, mamy $f(2) = -1$ co ma się nijak do napisu $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$, zatem nie jest tak, by szereg Taylora był równy funkcji (czasami tak jest).

Ze wzoru Taylora i z tw. Lagrange'a (jego szczególnej wersji: $n = 1$), można odczytać dowody wielu twierdzeń. Na przykład:

Twierdzenie.

Niech f ma ciągłą pierwszą i drugą pochodną w przedziale (a, b) i niech $x_0 \in (a, b)$. Wtedy:

a⁺) Jeśli $f'(x_0) > 0$, to istnieją p, q , $p < x_0 < q$ takie, że f jest rosnąca na $[p, q]$.

a⁻) Jeśli $f'(x_0) < 0$, to istnieją p, q , $p < x_0 < q$ takie, że f jest malejąca na $[p, q]$.

b⁺⁺) Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, to istnieją p, q , $p < x_0 < q$ takie, że $f(x_0) = \inf_{[p,q]} f$ (czyli f osiąga minimum lokalne w x_0).

b⁻⁻) Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, to istnieją p, q , $p < x_0 < q$ takie, że $f(x_0) = \sup_{[p,q]} f$ (czyli f osiąga maximum lokalne w x_0).

Dowód b⁺⁺).

Z ciągłości f'' wynika istnienie przedziału $[p, q]$, $x_0 \in (p, q)$ takiego, że f'' jest na nim dodatnia. Dla $x \in [p, q]$, $n = 2$, mamy:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\bar{x}) \cdot (x - x_0)^2$ dla pewnego $\bar{x} \in (p, q)$, skąd - uwzględniając $f'(x_0) = 0$,

$f''(\bar{x}) > 0$ - mamy: $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(\bar{x}) \cdot (x - x_0)^2 \geq 0$. Stąd $f(x) \geq f(x_0)$ dla $x \in [p, q]$, co należało dowieść.

Uwaga.

Dowody pozostałych podpunktów są podobne.

Uwaga.

Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$, to zachowanie f w pobliżu x_0 nie jest zdeterminowane, jak pokazują następujące przykłady:

$f_1(x) = x^3$ jest rosnąca i $f_1'(0) = 0$ i $f_1''(0) = 0$,

$f_2(x) = x^4$ ma minimum w 0 i $f_2'(0) = 0$ i $f_2''(0) = 0$,

$f_3(x) = -x^4$ ma maksimum w 0 i $f_3'(0) = 0$ i $f_3''(0) = 0$.

(Zbadanie znaku pochodnej na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ pozwala określić monotoniczność na nich i dowieść własności w 0.)

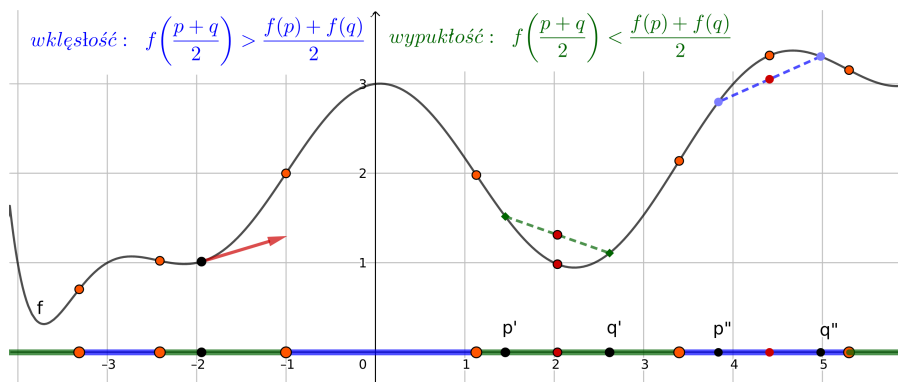
Wypukłość funkcji

Rozgrzewka. Napis $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, rachunkowo oczywisty, przy grze w podchody (tak, podchody) oznacza, że by z O dojść do celu C , można najpierw dojść do A , a potem przejść $\frac{1}{4}$ drogi z A do B .

Innymi słowy C leży na odcinku AB w $\frac{1}{4}$ jego długości od A . Dlatego napis $(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, $t \in [0, 1]$ wskazuje na wszystkie punkty odcinka AB (i to niezależnie od tego, czy rzecz się 'dzieje' w $\mathbb{R}^2$, w $\mathbb{R}$, czy w $\mathbb{R}^3$). (Zrób rysunki!) W podobny sposób na AL sprawdzano, że $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ leży we wnętrzu trójkąta ABC .

Wypukłość/wklęsłość funkcji na przedziale. Siadamy okrakiem na wykresie funkcji i poruszamy się od x 'bardzo ujemnych' do 'bardzo dodatnich'. Naogół zakręcamy, 'raz w lewo, raz w prawo'.

Zakręt 'w lewo', nad przedziałem $[a, b]$ na osi OX oznacza, że w każdym momencie strzałka wzdłuż stycznej leży pod wykresem funkcji; mówimy wtedy, że f jest wypukła na $[a, b]$ (innymi słowy: ścinając zakręt wzdłuż odcinka siecznej, cały skrót leży nad wykresem f).



Zakręcanie 'w lewo' to niemal to samo co zwiększanie współczynnika kierunkowego stycznej, czyli zwiększanie pochodnej. 'w prawo' to zmniejszanie.

Owa własność skrótów wzdłuż siecznych jest niżej określona 'znaczkami':

f jest **wypukła na przedziale** $[a, b]$, gdy $\forall p \neq q \in [a, b] \quad \forall t \in (0, 1) \quad f((1-t)p + tq) < (1-t)f(p) + tf(q)$;

f jest **wklęsła na przedziale** $[a, b]$, gdy $\forall p \neq q \in [a, b] \quad \forall t \in (0, 1) \quad f((1-t)p + tq) > (1-t)f(p) + tf(q)$.

Na szczęście dla ciągłych f można to wyrazić nieco prościej (sprawdzając, gdzie leży obraz środka odcinka $[p, q]$):

f jest **wypukła na przedziale** $[a, b]$, gdy $\forall p \neq q \in [a, b] \quad f\left(\frac{p+q}{2}\right) < \frac{f(p)+f(q)}{2}$;

f jest **wklęsła na przedziale** $[a, b]$, gdy $\forall p \neq q \in [a, b] \quad f\left(\frac{p+q}{2}\right) > \frac{f(p)+f(q)}{2}$.

Gdy f na $[a, x_0]$ jest wypukła[wklęsła] i na $[x_0, b]$ jest wklęsła[wypukła], to punkt x_0 nazywamy **punktem przegięcia**.

Na szczęście tę własność geometryczną (wypukłość/wklęsłość) łatwo sprawdza druga pochodna:

Twierdzenie. Niech f ma drugą pochodną w każdym punkcie przedziału $[a, b]$.

Jeśli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest wypukła na przedziale $[a, b]$.

Jeśli $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest wklęsła na przedziale $[a, b]$.

Jeśli $f''(x_0) = 0$ i $f'' > 0$ na (a, x_0) i $f'' < 0$ na (x_0, b) , to f ma punkt przegięcia w x_0 ;

jeśli $f''(x_0) = 0$ i $f'' < 0$ na (a, x_0) i $f'' > 0$ na (x_0, b) , to f ma punkt przegięcia w x_0 .

Przykład. Niech $f(x) = \arctan(x)$.

Mamy $f''(x) = \frac{-x}{(1+x^2)^2}$, zatem:

f jest wklęsła na $(0, +\infty)$,

f jest wypukła na $(-\infty, 0)$,

f ma punkt przegięcia w $x = 0$.

Przykład. Niech $f(x) = x^x$, $x > 0$.

Mamy $f''(x) = x^x \left(\frac{1}{x} + (\ln x + 1)^2 \right)$, zatem $f''(x) > 0$ dla $x > 0$ zatem f jest wypukła na $(0, +\infty)$.

Zatem $3^3 < \frac{2^2+4^4}{2}$, $2e^e < (e-1)^{e-1} + (e+1)^{e+1}$, $4^4 < \frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{2}{3} \cdot 5^5$.

Wypukłość/wklęsłość funkcji jest 'fabryką' nierówności:

Przykład. Niech $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

Mamy $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, zatem f jest wklęsła $(0, +\infty)$.

Stąd mamy (łatwe) $\ln 3 > \frac{\ln 2 + \ln 4}{2}$, co jest równoważne z $3 = \frac{2+4}{2} > \sqrt{2 \cdot 4}$.

Również $\ln \frac{2+4+6}{3} > \frac{\ln 2 + \ln 4 + \ln 6}{3}$, co jest równoważne z $4 = \frac{2+4+6}{3} > \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 6}$ (co też jest łatwe).

Również $\ln \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3}$, co jest równoważne z $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$ (co już takie łatwe nie jest).

Również $\ln \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n}$, co jest równoważne z $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Przykład. Niech $f(x) = x^3$, $x > 0$.

Mamy $f''(x) = 6x$, zatem f jest wypukła na $(0, +\infty)$.

Stąd mamy (łatwe) $\left(\frac{2+4}{2}\right)^3 < \frac{2^3+4^3}{2}$, co jest równoważne z $3 = \frac{2+4}{2} < \sqrt[3]{\frac{2^3+4^3}{2}}$.

Również $\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^3 \leq \frac{a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3}{n}$, co jest równoważne z $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \leq \sqrt[3]{\frac{a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3}{n}}$, dla $a_1, \dots, a_n \geq 0$.