

## 12. Liczby zespolone

Szanowni Państwo, tak oto dotarliśmy do ostatniego wykładu z Analizy 1. Poniżej znajdują Państwo podstawowe informacje dotyczące liczb zespolonych. Mam nadzieję, że ten temat pojawił się już na Algebrze i będzie tylko przypomnieniem (lub ewentualnym poszerzeniem) tego, co już Państwo wiedzą.

**0. Motywacja.** Liczby zespolone pojawiały się już dawno temu w rozważaniach matematycznych. Nazywano je liczbami fikcyjnymi, albo urojonymi i nie traktowano ich jako “prawdziwe” liczby. Były to pewne konstrukty wyobraźni tworzące urojoną rzeczywistość, w której można było wykonywać poprawne obliczenia na fikcyjnych obiektach.

Schemat użycia tych liczb wyglądał następująco. Brało się jakiś rzeczywisty problem matematyczny. Przechodziło się z nim do wymyślanego świata “liczb” zespolonych. Tam wykonywało się poprawne obliczenia na urojonych liczbach. Wracało się z wynikiem do świata “prawdziwych” liczb rzeczywistych i sprawdzało się, że wynik działa :)

Dla tych z Państwa, którzy chcą zobaczyć przykład takich obliczeń, jest on zamieszczony poniżej. Osoby, które chcą przejść do sedna mogą opuścić poniższy

**Przykład.** Załóżmy, że chcemy rozłożyć wielomian  $x^4 + 1$  na iloczyn dwóch wielomianów drugiego stopnia. Oczywiście możemy próbować to zrobić bez użycia liczb zespolonych, chcemy jednak zobaczyć przykład sytuacji opisanej powyżej.

Myślimy więc, że

$$x^4 + 1 = (x^2)^2 - (-1)$$

i gdyby udało się zapisać  $-1$  jako kwadrat pewnej liczby, to moglibyśmy użyć wzoru skróconego mnożenia i dokonać rozkładu tego wielomianu.

Zakładamy więc sobie, że jest jakaś urojona liczba  $i$  o tej własności, że  $i^2 = -1$ . Dzięki temu

$$x^4 + 1 = (x^2)^2 - i^2 = (x^2 - i)(x^2 + i).$$

To jednak nie rozwiązuje naszego problemu, bo szukane wielomiany drugiego stopnia mają być “normalne”, tzn. mają mieć współczynniki rzeczywiste. Rozkładamy więc dalej.

Wielomian  $x^2 - i$  ponownie dałoby się rozłożyć, gdyby w naszym urojonym świecie liczb fikcyjnych istniała liczba  $u$  taka, że  $u^2 = i$ . Zakładamy więc ponownie, że mamy takie  $u$  i dokonujemy rozkładu

$$x^2 - i = x^2 - u^2 = (x - u)(x + u).$$

Wielomian  $x^2 + i$  też trzeba rozłożyć i tu musimy być bardziej czujni. Przypominamy, że nasze obliczenia powinny być poprawne, czyli zgodne z regułami stosowanymi przy obliczeniach na liczbach rzeczywistych.

Zauważamy więc, że skoro  $u^2 = i$ , to  $-i = (-1) \cdot i = i^2 u^2 = (iu)^2$ . Dzięki temu

$$x^2 + i = x^2 - (-i) = x^2 - (iu)^2 = (x - iu)(x + iu).$$

Na razie uzyskaliśmy więc, że

$$(R) \quad x^4 + 1 = (x - u)(x + u)(x - iu)(x + iu).$$

Teraz pragniemy wrócić jakoś z uzyskanym wynikiem do świata liczb rzeczywistych. Aby tego dokonać zauważamy, że pierwszy i ostatni z powyższych dwumianów razem dają nam

$$(*) \quad (x - u)(x + iu) = x^2 + xiu - ux - iu^2 = x^2 + (iu - u)x + 1,$$

bo  $iu^2 = i \cdot i = -1$ . Jest to więc wielomian o współczynnikach już prawie rzeczywistych. Pytanie jest tylko takie, czym w tym urojonym świecie jest środkowy współczynnik  $iu - u$ .

Aby to zbadać musimy czegoś się dowiedzieć o naszym  $u$ . Założyliśmy sobie, że  $u$  istnieje, no ale jak może to  $u$  wyglądać?

Można domyślić się, że  $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$ , co daje, że możemy wziąć  $u = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ . Wtedy

$$u^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i.$$

Dzięki temu

$$iu - u = u(i-1) = \frac{i+1}{\sqrt{2}}(i-1) = \frac{i^2-1^2}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Wielomian rozważany w (\*) przyjmuje więc postać

$$(x-u)(x+iu) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$$

dając wielomian o współczynnikach rzeczywistych.

Podobnie postępujemy z pozostałymi dwoma środkowymi wielomianami w rozkładzie (R).

$$(x+u)(x-iu) = x^2 - xiu + ux - iu^2 = x^2 - (iu-u)x + 1 = x^2 + \sqrt{2}x + 1.$$

Urojony rozkład (R)

$$x^4 + 1 = [(x-u)(x+iu)] \cdot [(x+u)(x-iu)]$$

daje więc nam rzeczywisty wynik:

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Na koniec, aby dotrzeć w tym ćwiczeniu do finału, musimy jeszcze sprawdzić, że otrzymany wynik jest poprawny. Czyli, że nasze obliczenia w urojonym świecie liczb zespolonych nie wyprowadziły nas na manowce. Mam jednak nadzieję, że to mogą Państwo zrobić samodzielnie :)

**2. Definicja i podstawowe własności.** Przypomnijmy, że równanie

$$x^2 = 2$$

nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych. Możemy jednak uznać, że istnieje dodatnia liczba  $x$  spełniająca to równanie. Oznaczamy ją jako  $x = \sqrt{2}$  i jest to niewymierna liczba rzeczywista.

Podobnie, równanie

$$x^2 = -1$$

nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych. Możemy jednak uznać, że istnieje liczba  $x$  spełniająca to równanie. Oznaczamy ją jako  $i$  i jest to nierzeczywista liczba zespolona.

Oczywiście, jeśli  $i^2 = -1$ , to  $(-i)^2 = -1$ . Jeśli uznamy, że równanie  $x^2 = -1$  ma tylko te dwa rozwiązania  $x = \pm i$ , to możemy zdefiniować liczby zespolone  $\mathbb{C}$  w sposób następujący

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Każda liczba rzeczywista jest liczbą zespoloną. Dla  $a \in \mathbb{R}$  mamy, że  $a = a + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$  i dlatego  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Dla  $b \in \mathbb{R}$  liczby postaci  $ib$  to *liczby urojone*.

Jak wiemy, liczby rzeczywiste tworzą prostą i dzięki temu można je porównywać między sobą. Liczby zespolone tworzą płaszczyznę po utożsamieniu liczby zespolonej  $a + ib$  z parą liczb rzeczywistych  $(a, b)$ , czyli punktem  $(a, b)$  w układzie Kartezjańskim.

Dlatego, **nie ma sensownej metody porównywania liczb zespolonych**. Nie możemy stwierdzić, że  $0 < i$ ,  $-i < 0$ ,  $-i < i$ ,  $1 < i$ ,  $i < 1$ . Takie napisy nie mają sensu (mają tylko wtedy, jeśli obie porównywane liczby zespolone są rzeczywiste).

Liczby zespolone tworzą ciało liczbowe. W skrócie, oznacza to, że możemy na nich wykonywać wszystkie działania do jakich przywykliśmy w liczbach rzeczywistych, a wynikiem tych działań będzie liczba zespolona.

Niech  $z = a + ib$ ,  $w = c + id$ .

Dodawanie:

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

Odejmowanie:

$$z - w = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d).$$

Mnożenie:

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = ac + i^2bd + iad + ibc = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Dzielenie:

$$\frac{z}{w} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Dodawanie i mnożenie są przemienne. Działają też inne prawa wykonywania działań, do jakich przywykliśmy w liczbach rzeczywistych. W szczególności, w liczbach zespolonych działają wszystkie poznane wcześniej wzory skróconego mnożenia.

Z reguły, jeśli  $z \in \mathbb{C}$  definiujemy jako  $z = a + ib$ , to od razu zakładamy, że  $a, b \in \mathbb{R}$ . Część rzeczywista liczby  $z$  to

$$\operatorname{Re}(z) = a.$$

Część urojona liczby  $z$  to

$$\operatorname{Im}(z) = b.$$

Tak więc

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z).$$

Sprzężenie liczby  $z$  to

$$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib.$$

Własności sprzężenia są następujące

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w},$$

$$\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w},$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w},$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}},$$

$$\overline{(\bar{z})} = z.$$

Moduł liczby  $z$  to

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

czyli odległość tej liczby od zera na płaszczyźnie zespolonej.

Własności modułu są następujące

$$|z| = 0 \iff z = 0,$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2,$$

$$|\bar{z}| = |z|,$$

$$||z|| = |z|,$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},$$

Nierówność trójkąta:

$$||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|.$$

Liczby zespolone  $z$  spełniające równanie

$$|z| = r$$

tworzą okrąg o promieniu  $r > 0$  na płaszczyźnie zespolonej.

W szczególności, liczby zespolone  $z$  spełniające równanie

$$|z| = 1$$

tworzą okrąg o promieniu 1 na płaszczyźnie zespolonej. Dla tych liczb mamy, że

$$\frac{1}{z} = \bar{z},$$

bo  $1 = z\bar{z} = |z|^2$ .

Wyobraźmy sobie liczbę zespoloną  $z$  leżącą na tym okręgu o promieniu 1. Połączmy ją promieniem z punktem zero. Ten promień będzie tworzył kąt  $\alpha$  z dodatnią półosią  $OX$  (czyli z półprostą odpowiadającą dodatnim liczbom rzeczywistym). Ten kąt wyrażamy w radianach. Tak więc,  $z$  z definicji,  $\alpha$  jest równe długości łuku łączącego  $z$  z liczbą 1 (czyli punktem  $(1,0)$ ). Łatwe obliczenia pokazują, że wówczas

$$z = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha).$$

Stosuje się oznaczenie

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha).$$

Dzięki temu każdą liczbę zespoloną można zapisać jako

$$z = |z|e^{i\alpha}.$$

Powyższy kąt  $\alpha$  nazywany jest *argumentem* liczby  $z$ .

Ponadto

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

oraz

$$\overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}}$$

i dzięki temu

$$(e^{i\alpha})^k = e^{ik\alpha}, \quad \text{dla } k \in \mathbb{Z}.$$

O doskonałości liczb zespolonych świadczy poniższe

**Zasadnicze twierdzenie algebry.** *Każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony.*

Z tego wynika następujący

**Wniosek.** *Każdy wielomian  $w(z)$  stopnia  $n$  o współczynnikach zespolonych można rozłożyć jako*

$$w(z) = z_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

gdzie  $z_0, z_1, \dots, z_n$  są pewnymi (niekoniecznie różnymi) liczbami zespolonymi.

To pozwala nam zakończyć wykład z Analizy 1. Powyższe twierdzenie utwierdza nas, że nasza wędrówka od liczb naturalnych przez liczby całkowite i wymierne nie kończy się na liczbach rzeczywistych, ale kończy się na liczbach zespolonych zamykających dotychczasowe proste schematy tworzenia dalszych liczb.