

2-2. Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Szanowni Państwo, poniżej znajdują Państwo podstawowe informacje dotyczące liczb pierwszych i ich zastosowań do badania wymierności liczb rzeczywistych.

1. Liczby pierwsze. Liczba pierwsza, to liczba naturalna większa od 1, która dzieli się tylko przez 1 i samą siebie. Pozostałe liczby naturalne większe od 1 to liczby złożone.

Twierdzenie. (Podstawowe twierdzenie arytmetyki.) Każdą liczbę naturalną n większą od 1 można zapisać jako

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gdzie

$$p_1 < p_2 < \dots < p_k$$

są liczbami pierwszymi oraz

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}.$$

Ponadto ten rozkład liczby n na czynniki pierwsze jest jedyny.

Przykładowo liczbę 720 rozkładamy tak

$$720 = 10 \cdot 72 = 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Z powyższego twierdzenia wynika następujący

Wniosek. Jeśli $k, m \in \mathbb{N}$ i k^m dzieli się przez liczbę pierwszą p , to k też dzieli się przez p .

2. Zastosowania. Załóżmy, że chcemy zbadać wymierność liczby $\sqrt{17}$, albo $\sqrt[5]{33}$. W tym celu warto zastosować poniższy

Fakt. Jeśli $n, m \in \mathbb{N}$ i $\sqrt[m]{n}$ jest liczbą wymierną, to $n = k^m$ dla pewnej liczby naturalnej k .

Proof. Załóżmy, że $\sqrt[m]{n} \in \mathbb{Q}$ (dla $n, m \in \mathbb{N}$). Wówczas

$$\sqrt[m]{n} = \frac{k}{l}$$

dla pewnych $k, l \in \mathbb{N}$, które nie mają wspólnych dzielników większych od 1. Będziemy starali się pokazać, że $l = 1$.

Powyższa równość daje, że

$$(*) \quad n \cdot l^m = k^m.$$

Jeśli $l > 1$ to istnieje liczba pierwsza p dzieląca l czyli taka, że

$$l = p \cdot q$$

dla pewnej liczby naturalnej q .

Podstawiając to do $(*)$ otrzymujemy, że

$$n \cdot p^m \cdot q^m = k^m.$$

To oznacza, że k^m dzieli się przez liczbę pierwszą p . Z jedności rozkładu na czynniki pierwsze można wywnioskować, że w takim razie k też musi się dzielić przez p . Stąd otrzymujemy, że k i l mają wspólny dzielnik p , czyli sprzeczność. Z tego wynika, że l nie może być większe od 1, czyli $l = 1$. $\square$

Aby wykazać niewymierność liczby $\sqrt{17}$ zauważamy, że

$$4^2 < 17 < 5^2$$

nie ma więc liczby naturalnej m takiej, że $17 = m^2$ (co na podstawie powyższego faktu pozwala stwierdzić, że liczba $\sqrt{17}$ jest niewymierna).

Podobnie, aby wykazać niewymierność liczby $\sqrt[5]{33}$ zauważamy, że

$$2^5 < 33 < 3^5$$

nie ma więc liczby naturalnej m takiej, że $33 = m^5$.

Założmy, że chcemy zbadać wymierność liczby $\log_{12} 2 + \log_{\sqrt{12}} 6$. W tym celu musimy sobie przypomnieć podstawowe fakty dotyczące logarytmów.

$$\log_a b$$

jest definiowany dla $a, b > 0$, gdzie $a \neq 1$. Z definicji,

$$\log_a b = c$$

oznacza, że

$$a^c = b.$$

Podstawowe własności logarytmów, to

$$\begin{aligned}\log_a(a^b) &= b = a^{\log_a b}, \\ \log_a b + \log_a c &= \log_a(b \cdot c), \\ \log_a b - \log_a c &= \log_a\left(\frac{b}{c}\right), \\ \log_a(b^c) &= c \cdot \log_a b, \\ \log_{a^c} b &= \frac{1}{c} \cdot \log_a b, \\ \log_a b &= \frac{1}{\log_b a}, \\ \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a}.\end{aligned}$$

Dzięki temu przypomnieniu możemy przejść do wspomnianego przykładu.

Przykład. Chcemy zbadać wymierność liczby $L = \log_{12} 2 + \log_{\sqrt{12}} 6$. Zauważmy, że

$$\log_{\sqrt{12}} 6 = \log_{12^{\frac{1}{2}}} 6 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_{12} 6 = 2 \log_{12} 6 = \log_{12}(6^2).$$

Mamy więc, że

$$L = \log_{12} 2 + \log_{\sqrt{12}} 6 = \log_{12} 2 + \log_{12}(6^2) = \log_{12}(2 \cdot 6^2).$$

Założmy, że $\log_{12}(2 \cdot 6^2) \in \mathbb{Q}$. Wówczas

$$\log_{12}(2 \cdot 6^2) = \frac{m}{n}$$

dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$. Z definicji logarytmu mamy więc, że

$$12^{\frac{m}{n}} = 2 \cdot 6^2,$$

czyli

$$12^m = (2 \cdot 6^2)^n.$$

To po rozkładzie na czynniki pierwsze daje, że

$$(2^2 \cdot 3)^m = (2^3 \cdot 3^2)^n,$$

czyli

$$2^{2m} \cdot 3^m = 2^{3n} \cdot 3^{2n}.$$

Korzystając z jedyności rozkładu na czynniki pierwsze otrzymujemy więc, że

$$2m = 3n, \quad m = 2n.$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy, że

$$m = n = 0,$$

czyli sprzeczność z tym, że $n \neq 0$.

W związku z powyższym liczba L jest niewymierna.