

3-1. Nierówności i szacowania.

Szanowni Państwo, poniżej przedstawione są podstawowe informacje dotyczące nierówności i szacowań.

1. Wartość bezwzględna. Wartość bezwzględna (w skrócie *moduł*) liczby x to

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Własności:

- a) $0 \leq |x|$
- b) $|x| = 0 \iff x = 0$
- c) $||x|| = |x|$
- d) $|x^2| = x^2$
- e) $|x|^2 = x^2$
- f) $\sqrt{x^2} = |x|$ (ale uwaga: $(\sqrt{x})^2 = x$)
- g) $x \leq |x|$
- h) $|-x| = |x|$
- i) $|a - b| = |b - a|$
- j) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- k) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

Interpretacja geometryczna:

$|x - a|$ to odległość między liczbami x i a . Z tego wynika, że następujące warunki są równoważne (czyli oznaczają to samo):

- a) $|x - a| < \epsilon$
- b) $a - \epsilon < x < a + \epsilon$
- c) $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$

Uwaga:

Nierówność $|x| < a$ oznacza, że $-a < x < a$ (czyli $x \in (-a, a)$), a to oznacza, że spełnione są dwie nierówności: $x < a$ oraz $-x < a$.

2. Nierówność trójkąta. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi poniższa nierówność trójkąta

$$(*) \quad |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Można ją wykazać podnosząc obie strony tej nierówności do kwadratu i korzystając z tego, że $|x|^2 = x^2$. Ważne jest to, że w tej nierówności (*) można zamiast b podstawić $-b$ i otrzymać

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|,$$

czyli

$$(**) \quad |a - b| \leq |a| + |b|.$$

W skrócie obie nierówności (*) i (**) można zapisać jako

$$(***) \quad |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Ważne jest również to, że nierówność (**) daje następujący wniosek

$$|a| = |(a+b) - b| \leq |a+b| + |b|,$$

więc (po przeniesieniu $|b|$ na drugą stronę) dostajemy

$$|a| - |b| \leq |a+b|.$$

Podobnie możemy stwierdzić, że

$$|b| - |a| \leq |a+b|$$

i zapisać obie te nierówności jako

$$||a| - |b|| \leq |a+b|.$$

Oczywiście w tej nierówności znowu możemy podstawić $-b$ zamiast b i otrzymać

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b|.$$

Ta ostatnia nierówność razem z nierównością (***) daje nam **ogólną nierówność trójkąta**:

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

3. Część całkowita i ułamkowa. Część całkowita (inaczej *cecha*) liczby x to największa liczba całkowita nieprzekraczająca x . To znaczy, że cecha liczby całkowitej x wynosi x . A jeśli liczba x nie jest całkowita, to stajemy na osi liczbowej w punkcie x , patrzymy w kierunku $-\infty$ i znajdujemy najbliższą liczbę całkowitą w tym kierunku. To właśnie jest cecha liczby x , którą oznaczamy przez $[x]$.

Przykłady: $[3] = 3$, $[-8] = -8$, $[3, 2] = 3$, $[-5, 3] = -6$ (tak -6 , a nie -5).

Cechę liczby x można więc zdefiniować przy pomocy warunku $[x] \in \mathbb{Z}$ (gdzie $\mathbb{Z}$ to liczby całkowite) oraz dwóch nierówności:

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Te dwie nierówności można też zapisać tak

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

Uwaga: Cecha nie jest funkcją okresową, ale spełnia

$$[x + k] = [x] + k,$$

dla $k \in \mathbb{Z}$.

Część ułamkowa (inaczej *mantysa*) liczby x jest oznaczana przez $\{x\}$ i definiowana jako

$$\{x\} = x - [x].$$

Zgodnie z definicją jest więc to odległość jaką musimy przebyć na osi liczbowej z punktu x tak, aby (idąc w kierunku $-\infty$) dotrzeć do $[x]$.

Przykłady: $\{3\} = 0$, $\{-8\} = 0$, $\{3, 2\} = 0, 2$, $\{-5, 3\} = 0, 7$ (tak $0, 7$, a nie $0, 3$, bo chcemy dojść do -6).

Mantysa jest określona przez dwie kluczowe własności:

a) $\{x\} = x$ dla $x \in [0, 1)$

b) jest to funkcja okresowa spełniająca $\{x + 1\} = \{x\}$, czyli

$$\{x + k\} = \{x\},$$

dla $k \in \mathbb{Z}$.

4. Nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną. Nierówność między średnimi

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz dowolnych $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$.

Inne formy tej nierówności to (po podniesieniu do potęgi n -tej)

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n.$$

Albo (po podstawieniu a_k^n zamiast a_k)

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n}.$$

Uwaga: Równość w nierówności między średnimi zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są takie same, tzn. $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Przykłady: Dla $a, b, c \geq 0$ mamy

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$2\sqrt{ab} \leq a+b$$

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

$$3\sqrt[3]{abc} \leq a+b+c$$

$$abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$$

$$abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

$$ab = a \cdot b \cdot 1 \leq \frac{a^3 + b^3 + 1^3}{3} = \frac{a^3 + b^3 + 1}{3}$$

$$ab^2 = a \cdot b \cdot b \leq \frac{a^3 + b^3 + b^3}{3} = \frac{a^3 + 2b^3}{3}.$$

5. Porównywanie liczb. W tej sekcji pokażemy dwa przykłady dotyczące porównywania liczb

Przykład 1. Rozważmy następujące zadanie:

Uzasadnij, która z liczb jest większa 15^{13} czy 2^{45} .

Ograniczenie: W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 100.

Ograniczenie oznacza, że rozwiązania typu $15^{13} = n = \dots$, co jest większe (mniejsze) niż $\dots = m = 2^{45}$ nie będą uznane, ze względu na to, że liczby n i m występujące w takim rozwiązaniu będą większe od 100.

Proste podejście do tego zadania daje, że

$$15 < 16 = 2^4,$$

czyli

$$15^{13} < (2^4)^{13} = 2^{4 \cdot 13} = 2^{52}.$$

To oznacza, że takie proste podejście niestety nie działa : (, bo wyszło nam po prawej stronie 2^{52} , czyli więcej niż 2^{45} .

Spróbujmy zatem pokazać, że

$$15^{13} > 2^{45}.$$

W tym celu rozkładamy 15 na czynniki pierwsze

$$15 = 3 \cdot 5$$

i staramy się pokazać, że

$$(*) \quad 15^{13} = (3 \cdot 5)^{13} = 3^{13} \cdot 5^{13} > 2^{45}.$$

Aby tego dokonać **porównujemy potęgi** trójki i piątki z potęgami dwójki:

a) $3^1 = 3 > 2 = 2^1$ (słabe, ale może się przydać)

b) $3^2 = 9 > 8 = 2^3$ (lepsze – to trzeba użyć)

c) $5^1 = 5 > 4 = 2^2$ (też słabe, ale może da radę)

Z b) wynika, że

$$3^{12} = (3^2)^6 > (2^3)^6 = 2^{18},$$

co daje nam najbliższe podejście do liczby 3^{13} występującej w pożądanej nierówności (*).

Natomiast z c) wynika, że

$$5^{13} > (2^2)^{13} = 2^{26}.$$

Powyższe nierówności dają, że

$$3^{12} \cdot 5^{13} > 2^{18} \cdot 2^{26} = 2^{18+26} = 2^{44}.$$

A to, łącznie z a) dowodzi, że nierówność (*) jest spełniona:

$$3^{13} \cdot 5^{13} = 3 \cdot 3^{12} \cdot 5^{13} > 2 \cdot 2^{44} = 2^{45}.$$

Przykład 2. Rozważmy następujące zadanie (zad. 46 lista 3-1):

Uzasadnij, która z liczb jest większa 45^{13} czy 2^{72} . W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 300.

Ponownie nie wiemy, czy zachodzi Opcja 1: $45^{13} > 2^{72}$, czy też może Opcja 2: $45^{13} < 2^{72}$.

Postarajmy się zbadać naszą sytuację:

$$45^{13} = (3^2 \cdot 5)^{13} = 3^{26} \cdot 5^{13}.$$

Podążając za Opcją 1 korzystamy z poprzednich obserwacji:

b) $3^2 = 9 > 8 = 2^3$,

c) $5^1 = 5 > 4 = 2^2$.

Uzyskując z b), że

$$3^{26} = (3^2)^{13} > (2^3)^{13} = 2^{39}$$

oraz z c), że

$$5^{13} > (2^2)^{13} = 2^{26},$$

dostajemy, że

$$45^{13} = 3^{26} \cdot 5^{13} > 2^{39} \cdot 2^{26} = 2^{65}.$$

W ten oto sposób nasze podejście do Opcji 1 kończy się porażką :{

Spróbujmy zatem Opcji 2 ponownie **porównując potęgi** trójki i piątki z potęgami dwójki:

d) $3^5 = 3 \cdot 81 = ??? < 2^?$

e) $5^? = ??? < 2^?$

Po podniesieniu nierówności d) i e) do odpowiednich potęg i skorzystaniu z pierwszej nierówności w **Przykładzie 1** możemy uzyskać rozwiązanie tego zadania.