

3-2. Nierówności i szacowania.

Szanowni Państwo, poniżej przedstawione są techniki szacowania ułamków.

1. Najpierw dla treningu popatrzymy na szacowanie iloczynów.

Wiadomo, że jeśli

$$a < b \quad \text{oraz} \quad c < d,$$

to możemy obie te nierówności

$$\begin{aligned} a &< b \\ c &< d \end{aligned}$$

przemnożyć stronami i uzyskać, że

$$ac < bd.$$

Ważna jest jednak następująca

Uwaga: Powyższa operacja działa wtedy, gdy liczby a, b, c, d są **NIEUJEMNE!!!**

Przykład:

$$\begin{aligned} 2 &< 5 \\ 3 &< 7 \end{aligned}$$

daje, że

$$2 \cdot 3 < 5 \cdot 7$$

i jest OK. Ale

$$\begin{aligned} -5 &< 2 \\ -3 &< 4 \end{aligned}$$

wcale **nie daje**, że

$$(-5) \cdot (-3) < 2 \cdot 4,$$

bo przecież ta ostatnia nierówność jest fałszywa.

Inne przykłady:

Mamy

$$\begin{aligned} -2 &< 5 \\ 3 &< 7 \end{aligned}$$

i tu

$$(-2) \cdot 3 < 5 \cdot 7.$$

Mamy

$$\begin{aligned} -2 &< 5 \\ -3 &< 7 \end{aligned}$$

i tu

$$(-2) \cdot (-3) < 5 \cdot 7.$$

Mamy

$$\begin{aligned} -2 &< 5 \\ -3 &< -1 \end{aligned}$$

i tu

$$(-2) \cdot (-3) > 5 \cdot (-1).$$

Wniosek: To oznacza, że jeśli $a < b$ oraz $c < d$ i nie wiemy czy te liczby są nieujemne, to nie wiemy czy $ac < bd$, czy też może $ac > bd$.

2. Teraz możemy przejść do szacowania ułamków.

Wiadomo, że jeśli

$$c > d$$

oraz obie liczby c, d są **DODATNIE!!!**, to

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{d}.$$

Dzięki temu wiemy, że jeśli dla dodatnich liczb a, b, c, d zachodzi

$$\begin{aligned} a &< b \\ c &> d, \end{aligned}$$

to

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d},$$

(bo $a < b$ oraz $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$ daje, że $a \cdot \frac{1}{c} < b \cdot \frac{1}{d}$).

Oznacza to, że im większy jest licznik danego ułamka, tym większy jest ten ułamek. Ale z mianownikiem jest odwrotnie. Im **mniejszy** jest mianownik danego ułamka, tym większy jest ten ułamek. Oczywiście w takim podejściu rozważamy tylko liczniki i mianowniki dodatnie.

W takiej “dodatniej” sytuacji schemat szacowania ułamków działa więc następująco.

Jeśli chcę oszacować ułamek $\frac{a}{c}$ od góry, to **zwiększam licznik** (czyli szukam b takiego, że $b > a$), **zmniejszam mianownik** (czyli szukam d takiego, że $d < c$) i uzyskuję oszacowanie górne

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$$

Jeśli chcę oszacować ułamek $\frac{b}{d}$ od dołu, to **zmniejszam licznik** (czyli szukam a takiego, że $a < b$), **zwiększam mianownik** (czyli szukam c takiego, że $c > d$) i uzyskuję oszacowanie dolne

$$\frac{b}{d} > \frac{a}{c}.$$

3. Uwaga. Powyższe rozważania nadal pozostają w mocy, gdy zastąpimy ostre nierówności (tzn. $>, <$) nierównościami nieostrymi (tzn. $\geq, \leq$).

4. Teraz zobaczmy, jak takie szacowania działają w praktyce.

4.1. Rozwiążmy zadanie polegające na oszacowaniu wyrażenia

$$W(n) = \frac{n^4 + 16n + 3}{2n^4 + 7n^2}$$

poprzez znalezienie dwóch liczb dodatnich C, D takich, że $C < W(n) < D$ dla $n \in \mathbb{N}$.

W tym celu znajdujemy *wyraz najwyższego rzędu* w liczniku. Jest to ten wyraz, gdzie n jest w najwyższej potęgce, czyli będzie to n^4 . Następnie zwiększamy licznik zastępując *wyrazy niższego rzędu* (tzn. te gdzie n ma niższą potęgę) odpowiednimi wyrazami najwyższego rzędu:

$$n^4 + 16n + 3 \leq n^4 + 16n^4 + 3n^4 = 20n^4.$$

Teraz patrzymy na mianownik. Ponownie znajdujemy tam wyraz najwyższego rzędu i widzimy, że jest to $2n^4$. Następnie zmniejszamy mianownik zastępując wyrazy niższego rzędu zerami:

$$2n^4 + 7n^2 > 2n^4 + 0 = 2n^4.$$

W skrócie, takie oszacowanie przeprowadzamy następująco

$$\frac{n^4 + 16n + 3}{2n^4 + 7n^2} < \frac{n^4 + 16n^4 + 3n^4}{2n^4 + 0} = \frac{20n^4}{2n^4} = 10 = D.$$

Możemy więc przejść do oszacowania dolnego. Tym razem zmniejszamy licznik i zwiększamy mianownik używając tej samej techniki, co wcześniej:

$$\frac{n^4 + 16n + 3}{2n^4 + 7n^2} > \frac{n^4 + 0 + 0}{2n^4 + 7n^4} = \frac{n^4}{9n^4} = \frac{1}{9} = C$$

i gotowe :)

4.2. Powyższa technika oszacowania działa w sytuacji, gdy w szacowanym wyrażeniu $W(n)$ występują same znaki "+". Rozważmy zatem wyrażenie $W(n)$, w którym pojawia się również znak "-"

$$W(n) = \frac{5n^3 - 2n + 3}{4n^3 + 3n^2 - n}$$

i spróbujmy je oszacować.

Tym razem zwiększamy licznik zastępując **umiejętnie** wyrazy niższego rzędu odpowiednimi wyrazami najwyższego rzędu **lub zerami**:

$$5n^3 - 2n + 3 < 5n^3 - 0 + 3n^3 = 8n^3.$$

Podobnie zmniejszamy mianownik zastępując **umiejętnie** wyrazy niższego rzędu zerami **lub odpowiednimi wyrazami najwyższego rzędu**:

$$4n^3 + 3n^2 - n > 4n^3 + 0 - n^3 = 3n^3.$$

W skrócie, takie oszacowanie przeprowadzamy więc następująco

$$\frac{5n^3 - 2n + 3}{4n^3 + 3n^2 - n} < \frac{5n^3 - 0 + 3n^3}{4n^3 + 0 - n^3} = \frac{8}{3}.$$

Używając tej samej techniki zmniejszamy licznik i zwiększamy mianownik, aby uzyskać oszacowanie dolne:

$$\frac{5n^3 - 2n + 3}{4n^3 + 3n^2 - n} > \frac{5n^3 - 2n^3 + 0}{4n^3 + 3n^3 - 0} = \frac{3}{7}.$$

4.3. Na koniec rozwiążmy jeszcze zadanie polegające na znalezieniu liczby g i dodatniej liczby C takiej, że wyrażenie

$$W(n) = \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 7n + 2}$$

jest oszacowane następująco

$$(*) \quad g - \frac{C}{n} < W(n) < g + \frac{C}{n}.$$

Aby znaleźć g zauważamy, że dla dużych wartości n wyrażenie $\frac{C}{n}$ jest bardzo bliskie liczby zero. Dlatego powyższe oszacowanie oznacza, że dla dużych wartości n wyrażenie $W(n)$ jest bardzo bliskie liczby g . Tak więc g jest *granica* wyrażenia $W(n)$ przy n dążącym do nieskończoności (więcej o pojęciu granicy nauczymy się w Temacie 4).

Ponieważ

$$W(n) = \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 7n + 2} = \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}},$$

to widać, że dla dużych wartości n wyrażenie $W(n)$ jest bardzo bliskie liczby $\frac{2}{3}$, czyli $g = \frac{2}{3}$.

Korzystając z tej informacji możemy przeprowadzić oszacowanie (*) podobnie jak robiliśmy to do tej pory. Jest jednak też trochę inna (chyba wygodniejsza) metoda, z którą warto się zapoznać.

Polega ona na tym, że (jak pamiętamy z poprzedniego wykładu) nierówność typu

$$a - \epsilon < x < a + \epsilon$$

można zapisać przy pomocy wartości bezwzględnej jako

$$|x - a| < \epsilon.$$

Dlatego oszacowanie (*) składające się z dwóch nierówności można zapisać używając tylko **jednej** nierówności jako

$$|W(n) - g| < \frac{C}{n}.$$

W takim razie przeprowadźmy powyższe oszacowanie

$$\begin{aligned} |W(n) - g| &= \left| \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 7n + 2} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{3 \cdot (2n^2 + 2n + 3) - 2 \cdot (3n^2 + 7n + 2)}{3 \cdot (3n^2 + 7n + 2)} \right| = \\ &= \left| \frac{-8n + 5}{9n^2 + 21n + 6} \right| = \frac{|-8n + 5|}{|9n^2 + 21n + 6|} = \frac{8n - 5}{9n^2 + 21n + 6} < \frac{8n - 0}{9n^2 + 0 + 0} = \frac{8}{9n}, \end{aligned}$$

co daje, że $C = \frac{8}{9}$.

Uwaga1: W powyższym oszacowaniu musieliśmy opuścić wartość bezwzględną. W mianowniku jest to łatwe

$$|9n^2 + 21n + 6| = 9n^2 + 21n + 6,$$

bo $9n^2 + 21n + 6$ jest zawsze dodatnie. Natomiast w liczniku mamy

$$|-8n + 5| = |-(8n - 5)| = |8n - 5| = 8n - 5,$$

bo $8n - 5$ jest zawsze dodatnie.

Uwaga2: A co gdyby w liczniku było $|-8n + 12|$? Wówczas możemy się pozbyć wartości bezwzględnej korzystając z nierówności trójkąta (z poprzedniego wykładu):

$$|-8n + 12| \leq |-8n| + |12| = 8n + 12.$$